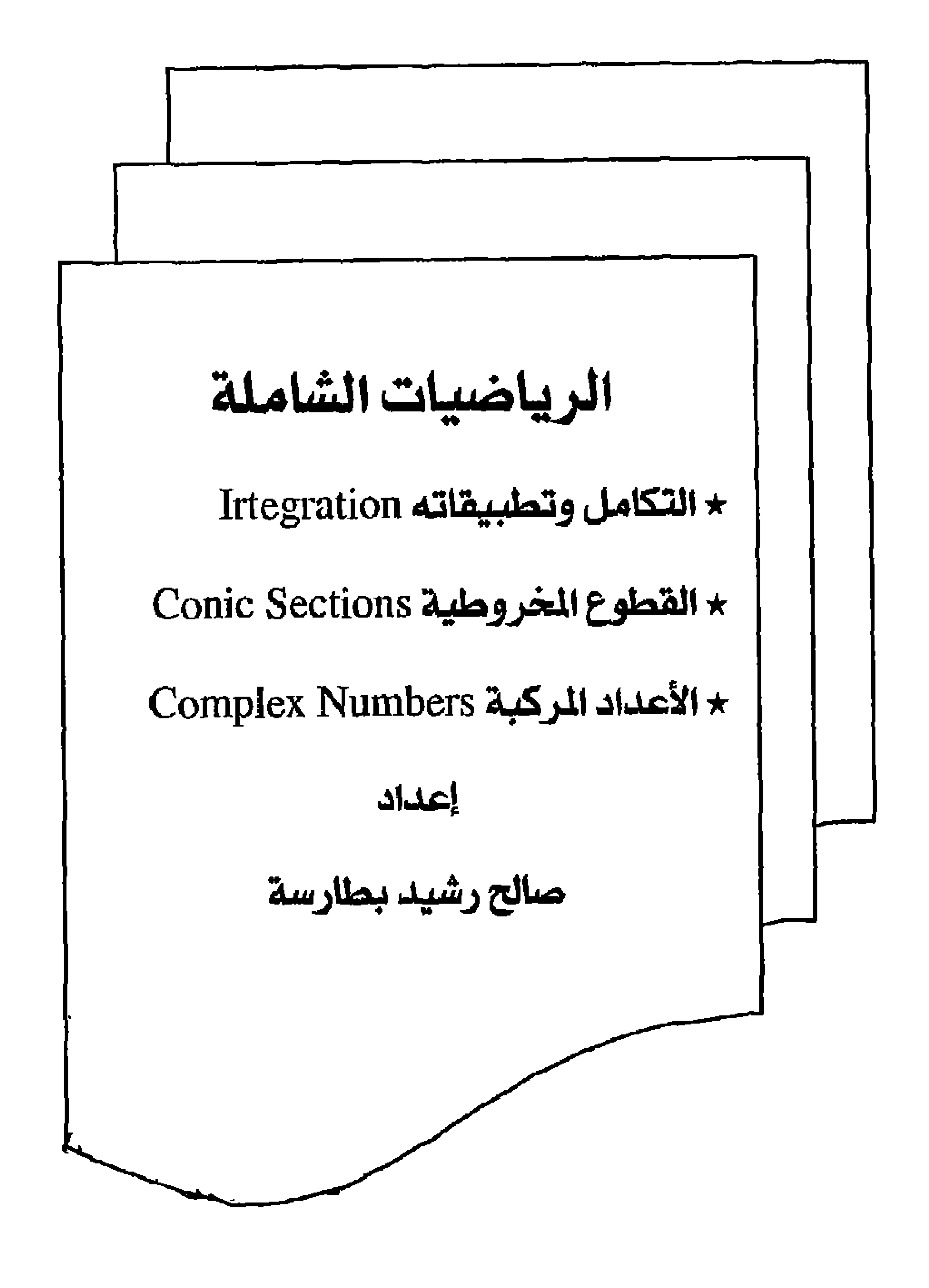
الرياضيات الشاملة

التكامل - القطوع - الأعداد المتتالية

صالح رشيد بطارسة



دار أسامة



الرياضيات الشاملة

★ التكامل وتطبيقاته Irtegration

★ القطوع المخروطية Conic Sections

★ الأعداد المركبة Complex Numbers

إعداد

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

الناشر

دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن – عمان

- هاتف : 5658252 – 5658253
- فاكس : 5658254
- العنوان: العبدلي- مقابل البنك العربي

ص. ب : 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة.- عمان: دار أسامة للنشر والتوزيع، 2013.

( ) ص.

ر.أ: (2013/6/2214).

الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

التكامل وتطبيقاته

القطوع المخروطية

الأعداد المركبة

المقدمة

بعد الاتكال على الله،،،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفّر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدّمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلاّ أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلّف من البشر.،

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يُسر وبلا معاناة.

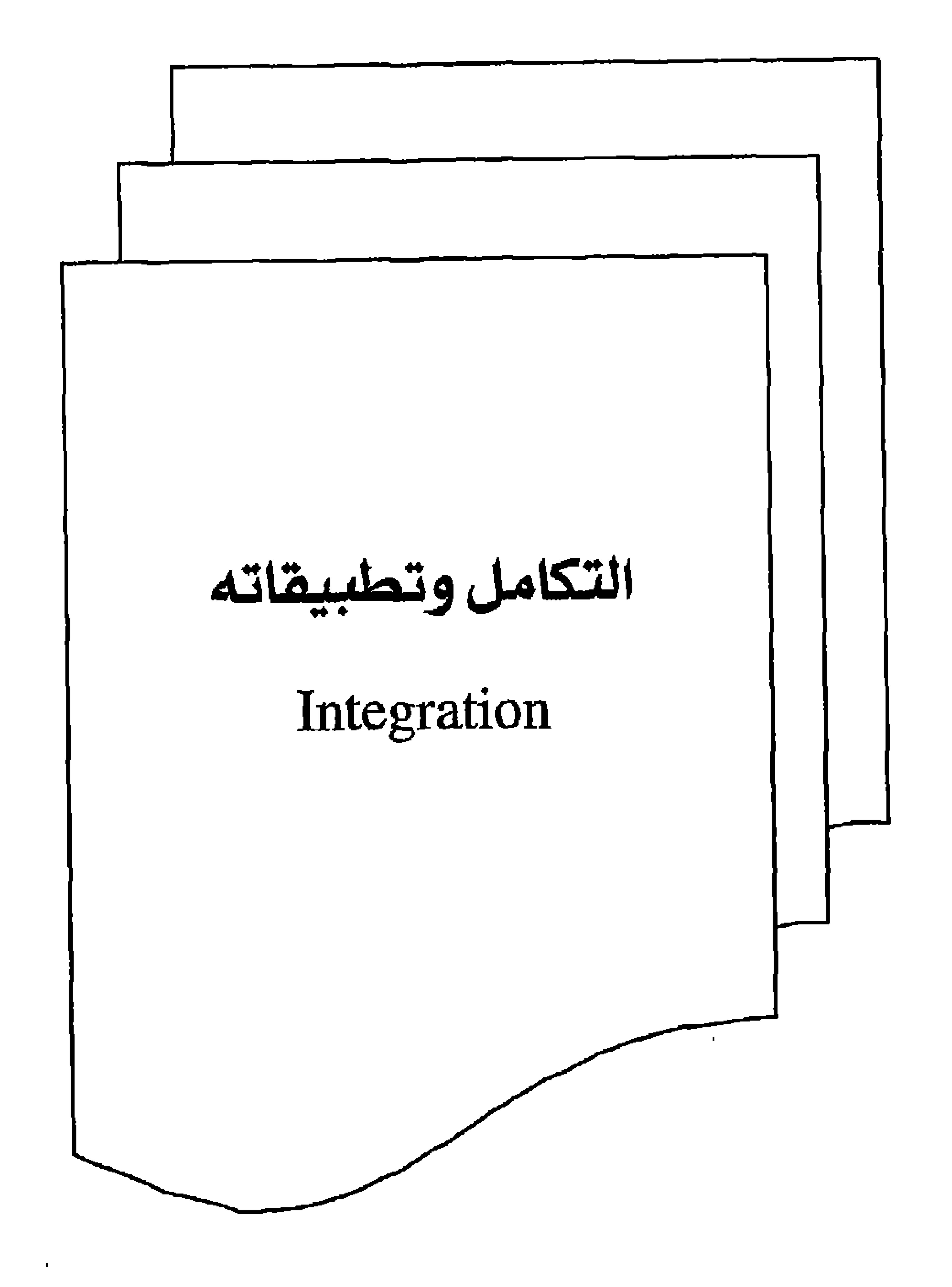
الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- الرياضيات إن كنت لا تدري تُنمي الذكاء وتُشذِّب الأخلاق وتسمو بالإنسان الى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج الى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

- فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة،،، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختم على ذلك بقولنا آمين!...

المؤلف



التكامل وتطبيقاته

Integration

يرتبط التكامل بالتفاضل ارتباطاً وثيقاً، ويفسر هذا الارتباط رياضياً بأن التكامل عكس التفاضل بالمعنى والمضمون، كون عملية ايجاد الاقتران الأصلي ق(س) مثلاً (التكامل) هي عملية عكسية لعملية ايجاد المشتقة الأولى قَ (س) مثلاً (التفاضل).

(٢٢ - ١) التكامل غير المحدود Indefinite Integration:

ان العلاقة الرابطة بين عمليتي التفاضل (الاشتقاق) والتكامل موضحة بهذه السطور:

الاقتران الأصلي		المشتقة الأولى
ق (س)		قَ (س)
اذا كان ق$_{١}$ (س) = س^{٣}	⟵	فإن قَ$_{١}$ (س) = ٣ س^{٢}
واذا كان ق$_{٢}$ (س) = س^{٣} + ٥	⟵	فإن قَ$_{٢}$ (س) = ٣ س^{٢}
ثم إذا كان ق$_{٣}$ (س) = س^{٣} - ٥	⟵	فإن قَ$_{٣}$ (س) = ٣ س^{٢}
وأخيراً اذا كان ق$_{٤}$ (س) = س^{٣} + جـ ، جـ $\in$ ح	⟵	فإن قَ$_{٤}$ (س) = ٣ س^{٢}

والآن لو سألنا هذا السؤال: ما هو الاقتران الأصلي الذي مشتقته الأولى:

قَ (س) = ٣ س^{٢} – الطرف الأيسر أعلاه- ؟

لأوقعنا الجواب في حيرة من أمرنا، كون هناك أربعة اقترانات هي:

ق$_{١}$ (س) ، ق$_{٢}$ (س) ، ق$_{٣}$ (س) ، ق$_{٤}$ (س) كلّ منها مشتقته الأولى هي:

قَ (س) = ٣ س^{٢}، فأيها نختار ليكون هو الاقتران الذي مشتقته الأولى قَ (س) = ٣ س^{٢} والذي إياه نُريد. كوننا نعلم أن:

(س^٣)َ = ٣ س^٢

و (س^٣ + ٥)َ = ٣ س^٢

و (س^٣ – ٥)َ = ٣ س^٢

ثم (س^٣ + جـ)َ = ٣ س^٢

وحتى لا تطول حيرتنا في الاختيار، فإننا نختار الاقتران العام:

ق (س) = س^٣ + جـ ، كون (جـ)َ = صفر

ليكون قَ (س) = ٣ س^٢ ولأن جـ عدد ثابت مشتقته صفر.

هذه العملية الإجرائية والتي انتهت باختيار ق (س) = س^٣ + جـ والذي مشتقته الأولى قَ (س) = ٣ س^٢ تسمى عملية التكامل Integration.

وبإيجاز شديد ولكن مفيد يمكن أن نكتب وبالرموز:

∫ قَ (س) د س = ق (س) ———— (١)

وتُقرأ تكامل الاقتران قَ (س) هو ق (س)

حيث العلامة ∫ هي الحرف الأول من كلمة Summation أي المجموع (لعلاقة التكامل بالمجموع والذي لن نناقشه في هذا المستوى بالذات).

أي أن ∫ ٣ س^٢ د س = س^٣ + جـ حيث جـ يسمى ثابت التكامل Constant of Inegration.

نعم، هذه العلاقة التي تُجسد عملية التكامل بوصفها عملية عكسية لعملية التفاضل (الاشتقاق).

وأحياناً يُسمى الاقتران الأصلي ق (س) بالاقتران البدائي Antiderevative Function .

ويرمز له بالرمز م (س) كون مَ (س) = قَ (س)

وكأن م (س) = ق (س) حيث لا فرق بينهما.

وبعد هذا النقاش الطويل لو طلبنا وباختصار اجراء عملية التكامل:

∫ ٥ س^{٤} د س ، فكأننا نسأل هذا السؤال:

ما هو الاقتران الأصلي ق (س) أو البدائي م (س) الذي مشتقته الأولى ق (س) = ٥ س٤؟

المحاولة على الجواب تتطلب اللجوء الى طريقة التجربة والخطأ أو الحزر والتخمين، ولكن الرياضيات علم لا يعتمد على هذه الطريقة أو تلك، وانما على القوانين والنظريات الراسخة بالأذهان، والقابلة للتطبيق في كل زمان ومكان. لذا لا بد لنا من تدوين قانون التكامل للاقترانات الجبرية في مرحلة أولية هكذا:

∫ سُ د س $\frac{\text{س}^{\text{و}+1}}{\text{و}+1}$ + جـ { حيث جـ ثابت التكامل ، و ≠ - ١ والتفسير سيأتي فيما بعد}.

وعندها نجيب على السؤال السابق بكل ثقة ودقة هكذا:

$$\int ٥\,\text{س}^{٤}\,\text{د س} = \frac{٥\,\text{س}^{٤+١}}{٤+١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٥\,\text{س}^{٥}}{٥} + \text{جـ}$$

$$= \text{س}^{٥} + \text{جـ}$$

وهذا هو الجواب الصواب لأن (س^{٥} + جـ)َ = ٥ س^{٤} + صفر

لذا فإننا نؤكد الحقيقة العلمية القائلة "عملية التكامل عملية معاكسة تماماً لعملية التفاضل". مثل عملية الطرح والتي هي عملية معاكسة تماماً لعملية الجمع هكذا:

$٧ = ٥ + ٥ - ٧$

فعند الطرح من عدد حقيقي ثم اضافة نفس العدد يعود العدد الأصلي الى قيمته الأصلية. أي أننا إذا أجرينا عملية الطرح على عدد حقيقي ثم أجرينا مباشرة عملية الجمع فالناتج هو العدد الحقيقي الأصلي.

وهكذا بالنسبة للتفاضل والتكامل:

ان $\frac{د}{د\,س} \int ق\,(س)\,د\,س = ق\,(س)$ {تكامل ثم تفاضل فكأننا لم نجر أيهما}

كون $\int قَ\,(س)\,د\,س = ق\,(س)$

وكذلك $\frac{د}{د\,س}(ق\,(س)) = قَ\,(س)$

ويشكل عام، دونك ملخص مفيد بالرموز:

(i) $\int قَ\,(س)\,د\,س = ق\,(س)$ ---------- (١)

(ii) $\frac{د}{د\,س} \int قَ\,(س)\,د\,س = قَ\,(س)$ ——— (٢)

(iii) $\int س^{و}\,د\,س = \frac{س^{و+١}}{و+١} + جـ$ ، $و \neq -١$ ---- (٣)

مثال:

ما الاقتران الأصلي (البدائي) الذي مشتقه الأولي $قَ\,(س) = ٣\,س^{٢} + ٤$ ؟

وكأن السؤال يطلب منا اجراء عملية التكامل:

أجرِ: $\int (٣\,س^{٢} + ٤)\,د\,س = \frac{٣\,س^{٣}}{٣} + ٤\,س + جـ$ {حسب القانون}

مثال:

اذا كان $ق\,(س) = س^{٢}$ أوجد $\frac{د}{د\,س} \int س^{٢}\,د\,س$

الحل:

أولاً تكامل: $\int س^{٢}\, د\, س = \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

ثم نفاضل $\frac{د}{د\, س}\left(\frac{١}{٣} س^{٣} + جـ\right) = \left(\frac{١}{٣}\right)(٣\, س^{٢}) + صفر = س^{٢}$

وبدلاً من هذا وذاك فإننا نستخدم العلاقة أو القانون:

$\frac{د}{د\, س} \int ق(س)\, د\, س = ق(س)$ نفسه

ومنها $\frac{د}{د\, س} \int س^{٢}\, د\, س = س^{٢}$

مثال:

اذا كان $\int ق(س)\, د\, س = س^{٤} + س + ٤$ أوجد ق (١) ، قَ (١)

الحل:

حتى نتخلص من التكامل $\int$ نجري عملية تفاضل هكذا:

$\frac{د}{د\, س} \int ق(س)\, د\, س = \frac{د}{د\, س}(س^{٤} + س + ٤) = ق(س)$

أي أن $ق(س) = ٤\, س^{٣} + ١$

ومنها $ق(١) = ٤\,(١)^{٣} + ١ = ٤ + ١ = ٥$

وحتى نجد قَ (س) فإننا نشتق ق (س) هكذا:

$قَ(س) = ١٢\, س^{٢}$

$\therefore قَ(١) = ١٢\,(١)^{٢} = ١٢$

مثال:

اذا كان $ص = \int \sqrt[٣]{س^{٢} + ٣\, س + ٥}\; د\, س$ أوجد $\left.\frac{د\, ص}{د\, س}\right|_{س = -١}$

الحل:

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د}}{\text{د س}} \int \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٥}\ \text{د س}$$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} + ٥}$ الاقتران نفسه

ومنها $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=-١} = \sqrt[٣]{(-١)^{٢} + ٣(-١) + ٥} = \sqrt[٣]{١ - ٣ + ٥} = \sqrt[٣]{٣}$

مثال:

اذا كان $\int \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = ٤\,\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢} + ٢$ أوجد $\text{قَ}(١)$

حتى نتخلص من التكامل تفاضل هكذا:

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}} \int \text{ق}(\text{س})\ \text{د س} = \frac{\text{د}}{\text{د س}} (٤\,\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢} + ٢) = \text{ق}(\text{س})$$

$\therefore \text{ق}(\text{س}) = ١٢\,\text{س}^{٢} - ١٢\,\text{س}$

$\text{قَ}(\text{س}) = ٢٤\,\text{س} - ١٢$

ومنها $\text{قَ}(١) = ٢٤(١) - ١٢ = ١٢$

وهكذا يمكن أن يقال بأن القانون $\int \text{س}^{\text{و}}\ \text{د س} = \frac{\text{س}^{\text{و}+١}}{\text{و}+١} + \text{جـ}$

(حيث $\text{جـ} \in \text{ح}$ ، $\text{و} \neq -١$) قانون خاص بالتكامل غير المحدود.

فعندما $\text{و} \in \text{ط}^{*}$ (عدد طبيعي)

فإن $\int \text{س}^{٢}\ \text{د س} = \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ} = \frac{١}{٣}\,\text{س}^{٣} + \text{جـ}$

وعندما $\text{و} \in \text{ط}$ (عدد طبيعي)

فإن $\int \text{س}^{٠}\ \text{د س} = \frac{\text{س}^{١}}{١} + \text{جـ} = \text{س} + \text{جـ}$ (وكأن س التي طارت عند التفاضل عادت بعملية التكامل)

وهذا يسمى تكامل الاقتران الثابت كما يلي:

$\int ٧ \, د\, س = ٧\, س + جـ$

وكذلك $\int -\ ٥ \, د\, س = -\ ٥\, س + جـ$

وبشكل عام $\int أ \, د\, س = أ\, س + جـ$ ، $أ \in ح$

وعندما و $\in$ ص (عدد صحيح)

فإن $\int س^{-٢} \, د\, س = \frac{س^{-٢+١}}{-٢+١} + جـ = \frac{س^{-٢}}{-٢} + جـ$

وعندما و $\in$ ك (عدد نسبي)

فإن $\int س^{\frac{١}{٢}} \, د\, س = \frac{س^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + جـ = \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

وعند تكامل الجذور يسمى أدلتها فإننا نحولها الى أسس نسبية هكذا:

$$\int \sqrt[٣]{س}\, د\, س = \int س^{\frac{١}{٣}} \, د\, س = \int س^{\frac{١}{٣}} \, د\, س = \frac{س^{\frac{١}{٣}+١}}{\frac{١}{٣}+١} + جـ$$

$$= \frac{س^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} + جـ = \frac{٣}{٤} س^{\frac{٤}{٣}} + جـ$$

$= \frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{س^{٤}} + جـ$ {كون السؤال يحوي جذراً فالجواب يجب أن يحوي جذر}

وكأننا نستطيع تكامل $س^{و}$ مهما كانت قيم و كعدد حقيقي ما عدا (- ١) فقط.

مثال:

أجر $\int (س^{٣} + ٤\, س^{٢} + ٥\, س + ٧)\, د\, س$

فإننا نكامل كل حدٍ لوحده من خلال كثير الحدود نفسه هكذا:

$$= \frac{س^{٣+١}}{٣+١} + \frac{٤ س^{٢+١}}{٢+١} + \frac{٥ س^{١+١}}{١+١} + ٧ س + جـ$$

$$= \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{٤}{٣} س^{٣} + \frac{٥}{٢} س^{٢} + ٧ س + جـ$$

(٢٢ - ٢) التكامل المحدود وخواصه Definite Integration:

ان كان ق (س) اقتراناً جبرياً فإن:

$\int س^{و} د س = \frac{س^{و+١}}{و+١} +$ جـ هذا القانون يستخدم لتكامل الاقترانات الجبرية ويسمى التكامل غير المحدود.

وأما لتكامل الاقترانات الجبرية في النوع الثاني من التكامل "التكامل المحدود" فإننا نستخدم القانون.

$$\int_{أ}^{ب} س^{و} د س = \left[\frac{س^{و+١}}{و+١}\right]_{أ}^{ب} = \frac{ب^{و+١} - أ^{و+١}}{و+١}$$

حيث أ ، ب $\in$ ح ، والعدد أ يسمى الحد الأدنى للتكامل.

والعدد ب يسمى الحد الأعلى للتكامل.

والجواب الناتج دائماً عدد حقيقي.

مثال:

أوجد $\int_{١}^{٣} س^{٢} د س = \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣}$ ونبدأ بتعويض الحد الأعلى – التعويض بالحد الأدنى.

$$= \frac{(٣)^{٣}}{٣} - \frac{(١)^{٣}}{٣} = \frac{٢٦}{٣}$$

وبشكل عام يمكن أن يقال: $\int_{أ}^{ب} قَ (س) د س =$ ق (ب) – ق (أ) هذا بعد أن نجد ق (س) لأن $\int_{أ}^{ب} قَ (س) د س = \left[ق (س)\right]_{أ}^{ب}$

= ق (ب) – ق (أ) كما هو أعلاه.

والآن يجب التمييز بين تفاضل التكامل المحدود وتفاضل التكامل غير المحدود والتفسير:

$\frac{د}{د س} \int$ قَ (س) د س = قَ (س) نفسه خاص بالتكامل غير المحدود

لكن $\frac{د}{د س} \int_{أ}^{ب}$ قَ (س) د س = صفر حيث:

$\int_{أ}^{ب}$ قَ (س) د س = دائماً عدد حقيقي و $\frac{د}{د س}$ (العدد الحقيقي) = صفر

والتوضيح في هذه الأمثلة:

مثال:

أوجد $\frac{د}{د س} \int$ ٢ س د س = ٢ س

لأن $\int$ ٢ س د س = $\frac{٢ س^{٢}}{٢}$ = س^{٢} + جـ

ثم $\frac{د}{د س}$ (س^{٢} + جـ) = ٢ س

"تفاضل التكامل غير المحدود" ← الاقتران نفسه

مثال:

أوجد $\frac{د}{د س} \int_{-١}^{٣}$ ٢ س د س = صفر

لأن $\int_{-١}^{٣}$ ٢ س د س = س$^{٢}\Big]_{-١}^{٣}$ = ٩ − (− ١) = ١٠

$\frac{د}{د س}$ (١٠) = صفر

"تفاضل التكامل المحدود" ← صفر دائماً

وحتى يسهُل استخدام القانون $\int_{أ}^{ب}$ س^{و} د س = $\frac{ب^{و+١} - أ^{و+١}}{و + ١}$ في تكاملات الاقترانات الجبرية وعلى وجه الخصوص كثيرات الحدود يجب التعرف على خواص التكامل المحدود التالية:

(i) **الخاصية الخطية** Linear Property:

وتتلخص بنقطتين أساسيتين هما:

الأولى: اخراج العامل الثابت للاقتران أي:

$$\int_{أ}^{ب} جـ\, ق(س)\, د\, س = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د\, س$$ حيث جـ عدد ثابت.

مثال:

$$\int_{٠}^{٢} ٥\, س^{٢}\, د\, س = ٥\int_{٠}^{٢} س^{٢}\, د\, س = ٥\left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{٠}^{٢} = \frac{٥}{٣}(٢)^{٣} - \frac{٥(٠)^{٣}}{٣}$$

$$= \frac{٤٠}{٣} - \text{صفر} = \frac{٤٠}{٣}$$

والثانية: تكامل مجموع اقترانين أو فرقهما أي:

$$\int_{أ}^{ب} (ق(س) \pm هـ(س))\, د\, س = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د\, س \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, د\, س$$

وبشكل عام: $\int_{أ}^{ب} (ق \pm هـ \pm \cdots \pm ل)\, د\, س$

$$= \int_{أ}^{ب} ق(س) + \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, د\, س \pm \cdots \pm \int_{أ}^{ب} ل(س)\, د\, س$$

أي أن تكامل مجموع عدده اقترانات = مجموع تكاملاتها اذا كانت جميعها قابلة للتكامل. وبناءً على ما سبق يمكن تكامل كثيرات الحدود بكافة أنواعها وأشكالها كما يلي:

$$\int_{٠}^{٢} ٥\, دس = ٥\, س\Big]_{٠}^{٢} = ٥\,(٢ - ٠) = ١٠$$ تكامل الثابت

$$\int_{٠}^{١} (٣\, س + ٤)\, دس = \int_{٠}^{١} ٣\, س\, د\, س + \int_{٠}^{١} ٤\, د\, س$$

$$= \left[\frac{٣\, س^{٢}}{٢} + ٤\, س\right]_{١}^{١} = \frac{٣(١)^{٢}}{٢} + ٤\,(١) - \text{صفر}$$

$$= \frac{٣}{٢} + ٤ = ٥\frac{١}{٢}$$ وهكذا

هذا ويمكن اجراء عملية التكامل دون استخدام الخاصية الخطية هكذا:

$$\int_{٠}^{١} (٣\, س + ٤)\, دس = \left[\frac{٣\, س^{٢}}{٢} + ٤\, س\right]_{٠}^{١} = ٥\frac{١}{٢}$$

مثال:

اذا كان $\int_{0}^{ج}$ (٢ س - ١) د س = ٦ ما قيمة جـ؟

الحل:

$$\int_{0}^{ج} (٢ س - ١)\, د س = \left[\frac{ج س^{٢}}{ج} - س\right]_{0}^{ج} = ج^{٢} - ج = ٦$$

∴ جـ^{٢} – جـ - ٦ = صفر

(جـ - ٣) (جـ + ٢) = صفر

∴ جـ = { - ٢ ، ٣ } الحد الأعلى للتكامل كما هو واضح أعلاه.

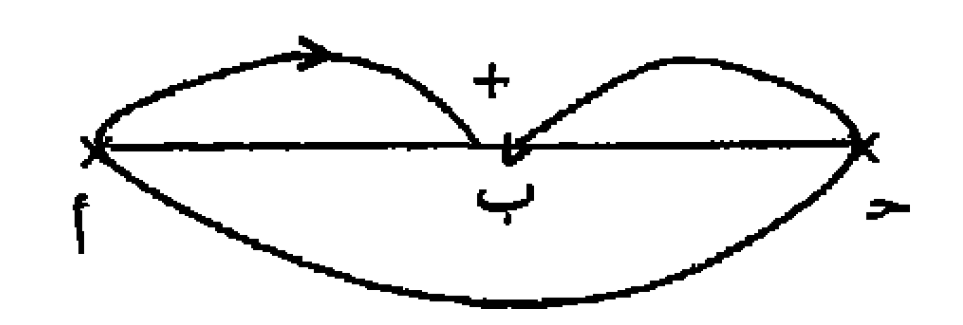
(ii) خاصية الاضافة Addition Property وعكسها:

ومفهومها ببساطة هو تجميع عدة تكاملات بتكامل واحد، وأما عكسها فهو تفريق تكامل واحد الى عدة تكاملات، كما هو آت:

إذا كان ق (س) اقتران قابل للتكامل على فترة تنتمي اليها الأعداد الحقيقية التالية أ ، ب ، جـ مع وجود شرطين (١) أن يكون الاقتران نفسه (٢) أن يكون الحد الأعلى للتكامل الأول = الحد الأسفل للتكامل الثاني، فإن:

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س + $\int_{ب}^{ج}$ ق (س) د س = $\int_{أ}^{ج}$ ق (س) د س "تجميع عدة تكاملات في تكامل واحد"

كما في الشكل:



وعكسها أيضاً صواب أي أن:

$\int_{أ}^{ج}$ ق (س) د س = $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س + $\int_{ب}^{ج}$ ق (س) د س "تفريق تكامل واحد الى عدة تكاملات"

وتسمى عكس عملية الاضافة بالتقسيم (المعنى المبسط لها).

مثال:

اذا كان $\int^{٤}$ ق (س) د س = ٥ ، $\int_{٤}^{٧}$ ق (س) د س = ٩

فإن $\int_{٢}^{٧}$ ق (س) د س = $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) د س + $\int_{٤}^{٧}$ ق (س) د س = ٥ + ٩ = ١٤

مع ملاحظة أن عكس خاصية الاضافة (التقسيم تتطلب أن يكون نفس الاقتران، مع اختلاف قاعدتي التعريف، كما في الاقتران المتشعب والذي له قاعدتا تعريف، كونهما لاقتران واحد هو المتشعب كما يلي:

مثال:

اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٤\text{س} - ٢ \;، & -١ \le \text{س} \le ٢ \quad \text{القاعدة الأولى} \\ ٣\text{س}^{٢} - ٦ \;، & ٢ < \text{س} \le ٣ \end{cases}$

أوجد $\int_{-١}^{٣}$ ق (س) د س

الحل:

$\int_{١}^{٢}$ (٤ س − ٢) د س + $\int_{٢}^{٣}$ (٣ س² − ٦) د س

"مع ملاحظة اختلاف القاعدتين لكنها لاقتران واحد"

$= \left[\dfrac{٤\text{س}^{٢}}{٢} - ٢\text{س}\right]_{-١}^{٢} + \left[\dfrac{٣\text{س}^{٣}}{٣} - ٦\text{س}\right]_{٢}^{٣}$

$= \left[٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س}\right]_{-١}^{٢} + \left[\text{س}^{٣} - ٦\text{س}\right]_{٢}^{٣}$ وبعد التعويض والتبسيط

= (٤ − ٤) + (٩ + ٤) = ١٣

ويمكن استخدام خاصية الاضافة وعكسها في تكاملات الاقترانات المتشعبة (المثال أعلاه) والتي لها أكثر من قاعدة واقترانات القيمة المطلقة واقترانات أكبر عدد صحيح "سُلّمية أو درجية" وهكذا:

مثال:

أوجد $\int_{-٢}^{٣} |\text{س} + ١| \, \text{د س}$ بعد اعادة تعريف الاقتران

حيث س + ١ = صفر ⟵ س = - ١ صفر الاقتران

كما في الشكل وهكذا:

$$\underset{-٢ \le \text{س} \le -١}{-(\text{س} + ١)} \qquad \underset{-١ \le \text{س} \le ٣}{\text{س} + ١}$$

$$|\text{س} + ١| = \begin{cases} -\text{س} - ١ & ، \quad -٢ \le \text{س} < -١ \\ \text{س} + ١ & ، \quad -١ \le \text{س} \le ٣ \end{cases}$$

فإن $\int_{-٢}^{٣} |\text{س} + ١| \, \text{د س} = \int_{-٢}^{-١} (-\text{س} - ١) \, \text{د س} + \int_{-١}^{٣} (\text{س} + ١) \, \text{د}$ {الاقتران واحد وان اختلفت القاعدتان!}

$$= -\left[\frac{\text{س}^٢}{٢} - \text{س}\right]_{-٢}^{-١} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} + \text{س}\right]_{-١}^{٣} = \frac{١٧}{٢}$$ بعد التبسيط.

مثال:

أوجد $\int_{-١}^{٣} [\text{س}] \, \text{د س}$

$$\underset{٢}{\times} \xrightarrow{\quad \text{س} \quad} \underset{٣}{\times} \xrightarrow{\quad \text{س} \quad} \underset{٤}{\times}$$

بعد اعادة التعريف:

$$\text{طول الدرجة} = \frac{١}{|\text{معامل س}|} = \frac{١}{١} = ١$$

وبعد ملاحظة أن اشارة س موجبة داخل القوس لذا فإننا نعوض الحد الأدنى كون التعريف هكذا:

$$[\text{س}] = \begin{cases} ٢ & ، \quad ٢ \le \text{س} < ٣ \\ ٣ & ، \quad ٣ \le \text{س} < ٤ \\ ٤ & ، \quad \text{س} = ٤ \end{cases}$$

ومنه $\int_{٢}^{٤} [\text{س}] \, \text{د س} = \int_{٢}^{٣} ٢ \, \text{د س} + \int_{٢}^{٤} ٣ \, \text{د س} + \int_{٤}^{٤} ٤ \, \text{د س}$ أصبح السؤال تكاملات اقترانات ثابتة

= ٢ (٣ - ٢) + ٣ (٤ - ٣) + ٤ (٤ - ٤)

= (٢) (١) + (٣) (١) + (٤) (صفر)

= ٢ + ٣ = ٥

مثال:

أوجد $\int_{٢}^{٤}$]- س[د س من الملاحظ أن اشارة س سالبة لذا نعوض الحد الأعلى كون التعريف:

]س[= { -٣ ، ٢ < س ≤ ٣ ؛ -٤ ، ٣ < س ≤ ٤ }

ومنها $\int_{٢}^{٤}$]- س[د س = $\int_{٢}^{٣}$ (- ٣) د س + $\int_{٣}^{٤}$ (- ٤) د س

= - ٣ (٣ - ٢) + (- ٤) (٤ ، ٣)

= - ٣ - ٤ = - ٧

(iii) **خواص المقارنة** Comparision Properties:

هذه الخواص مؤلفة من شقين:

الشق الأول: المقارنة بالاشارة سالبة أو موجبة.

ليكن ق (س) قابل للتكامل على]أ ، ب[فإذا كان:

ق (س) ≤ صفر لكل س ∋]أ ، ب[فإن:

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س ≤ صفر

وإذا كان ق (س) ≥ صفر لكل س ∋]أ ، ب[فإن:

$\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س ≥ صفر

والتفسير اللغوي لهذا الشق:

تكامل الاقتران الموجب ⟵ موجب

وتكامل الاقتران السالب ⟵ سالب

وبشكل عام: إن اشارة التكامل نفس اشارة الاقتران.

مثال:

ما اشارة كل من التكاملات التالية دون اجراء عملية التكامل ولو كانت ممكنة؟

$$\int_{-٥}^{-١} \frac{س^{٢}}{س^{٢} + ٥} \, د\,س$$

بما أن اشارة التكامل هي نفس اشارة الاقتران، فإننا نجد اشارة الاقتران هكذا:

اشارة البسط $س^{٢}$: على الفترة من -٥ إلى -١ الإشارة + + + + + كونها مربع كامل

اشارة المقام $س^{٢} + ٥$: على الفترة من -٥ إلى -١ الإشارة + + + + + + كونها مربع كامل + عدد موجب

∴ اشارة ق (س) كخارج قسمة اشارتين موجبتين هي موجبة.

∴ $\int_{-٥}^{-١} \frac{س^{٢}}{س^{٢} + ٥} \, د\,س$ موجب لأن الاقتران موجب.

وبنفس الطريقة ما اشارة $\int_{١}^{٢} \frac{٢\,س - ٥}{س^{٢} + ١} \, د\,س$ ؟

اشارة البسط: $٢\,س - ٥ = صفر \longrightarrow س = \frac{٥}{٢}$ صفره

على الفترة من ١ إلى ٢ الإشارة - - - - - ، و $\frac{٥}{٢}$ صفر الاقتران

اشارة المقام: على الفترة من ١ إلى ٢ الإشارة + + + +

كونه مربع كامل وعدد موجب.

∴ اشارة الاقتران سالب.

أي أن $\int_{1}^{2} \frac{2س - 5}{س^2 + 1}$ د س سالب لأن اشارة الاقتران سالب.

الشق الثاني: المقارنة بين اقترانين.

ليكن ق (س) ، هـ (س) اقترانين قابلين للتكامل في [أ ، ب]

اذا كان ق (س) $\leq$ هـ (س) فإن $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س $\leq \int_{أ}^{ب}$ هـ (س) د س

أي أن تكامل الاقتران الأكبر ← أكبر، وتكامل الاقتران الأصغر ← أصغر

مثال:

بيّن أن $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \int_{0}^{1} \frac{س^3}{\sqrt{1 + س^2}}$ د س $\leq \frac{1}{4}$

نحصر مقام الاقتران بين أصغر قيمة له وأكبر قيمة له.

لكل $0 \leq س \leq 1$ فإن $1 + س^2$ تتراوح بين

ق (0) = 1 + صفر = 1 ، ق (1) = 1 + $(1)^2$ = 2

أي أن $1 \leq 1 + س^2 \leq 2$

ومنها وبعد أخذ الجذر التربيعي $1 \leq \sqrt{1 + س^2} \leq \sqrt{2}$

وبعد ضرب كل طرف بالحد $س^3$ يتم تبديل الطرفين هكذا:

$$\frac{س^3}{\sqrt{2}} \leq \frac{س^3}{\sqrt{1 + س^2}} \leq \frac{س^3}{1}$$

(تبديل الطرفين لأنه عند قسمة $س^3$ على الأطراف فالأصغر يصبح أكبر والعكس صواب)

وبتكامل جميع الأطراف:

$$\int_{0}^{1} \frac{س^{2}}{\sqrt{2}} د س \geq \int_{0}^{1} \frac{س^{2}}{\sqrt{1+س^{2}}} د س \int_{0}^{1} \frac{س^{2}}{1} د س$$

$$- \left[\frac{س^{4}}{4\sqrt{2}}\right] \geq \int_{0}^{1} \frac{س^{2}}{\sqrt{1+س^{2}}} د س \geq \left[\frac{س^{4}}{4}\right]_{0}^{1}$$

ومنه $\frac{1}{4\sqrt{2}} \geq \int_{0}^{1} \frac{س^{2}}{\sqrt{1+س^{2}}} د س \geq \frac{1}{4}$ وهو المطلوب.

(iv) اللا تغير عند الانسحاب:

هذه الخاصية تتعلق بالاقتران الخطي الذي معامل س فيه وحدة واحدة أو بجعل معامل س تساوي وحدة واحدة بعد اخراج المعامل كما يلي:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س) د س = \int_{أ-جـ}^{ب-جـ} ق(س+جـ) د س = \int_{أ+جـ}^{ب+جـ} ق(س-جـ) د س$$

والملاحظ أنه عندما يضاف الى الاقتران العدد الثابت جـ فإنه يطرح من حديه "الحد الأعلى والحد الأسفل" هكذا:

$$\int_{0}^{1} (س+2)^{2} د س = \int_{0+2}^{1+2} (س+2-2)^{2} د س = \int_{2}^{3} س^{3} د س = \left[\frac{س^{4}}{4}\right]_{2}^{3} = \frac{65}{4}$$

وللتحقق من صحة الحل نفك $(س+2)^{3} = س^{3} + 6 س^{2} + 12 س + 8$

ثم تكامله:

$\int_{0}^{1} (س^{3} + 6 س^{2} + 12 س + 8) د س$ = وبعد التبسيط والتعويض= $\frac{65}{4}$ نفس الجواب

مثال:

أو $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2 س + 1)^{3}$دس هنا نجعل معامل س وحدة واحدة باخراج المعامل خارج القوى

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 2^{3} (س + \frac{1}{2})^{3} د س = 8 \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} (س + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})^{3} د س$$

$= 8 \int_{1}^{2} س^2 د س = 8 \left[\frac{س^4}{4} \right]_{1}^{2} = 30$

مثال:

أوجد $\int_{1}^{2} (س^2 - 2 س + 1)^5 د س$

نحوله الى اقتران خطي هكذا:

$$\int_{1}^{2} (س^2 - 2 س + 1)^5 د س = \int_{1}^{2} ((س - 1)^2)^5 د س = \int_{1}^{2} (س - 1)^{10} دس$$

$$= \int_{1-1}^{2-1} (س - 1 + 1)^{10} د س = \int_{صفر}^{1} س^{10} د س = \left[\frac{س^{11}}{11} \right]_{أ}^{ب} = \frac{1}{11}$$

(v) **التكامل على نقطة** Intergration on Point :

ومعناه عند اجراء تكامل محدود لاقتران قابل للتكامل ويكون حده الأسفل = حده الأعلى = أ مثلاً.

فإن $\int_{أ}^{أ} قَ (س) د س = ق (س) \Big]_{أ}^{أ} = ق (أ) - ق (أ) =$ صفر

أي أن $\int_{أ}^{أ} ق (س) د س =$ صفر دائماً

مثال:

$$\int_{2}^{2} س د س = \left[\frac{س^2}{2} \right]_{2}^{2} = \frac{1}{2} (4 - 4) = صفر$$

وبشكل عام:

$$\int_{أ}^{أ} س^{و} د س = \left[\frac{س^{و+1}}{و + 1} \right]_{أ}^{أ} = \frac{أ^{و+1} - أ^{و+1}}{و + 1} = صفر$$

ولكن ليس معنى ذلك أنه اذا كانت قيمة التكامل = صفر فإنه تكامل على نقطة أي عكس الخاصية ليس دائماً صواب.

مثال:

$$\int_{-1}^{1} ٢س\,د\,س = \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{-1}^{1} = (١)^{٢} - (-١)^{٢} = صفر$$

هذا ليس معناه - ١ = ١ بأي حال من الأحوال

أي أن $\int_{أ}^{أ} ق(س)\,د\,س = صفر$ لكن ليس العكس صواب دائماً:

أي إذا كان قيمة التكامل المحدود = صفر فليس معناه دائماً هو قيمة تكامل على نقطة "كما في المثال أعلاه".

والمثال التالي أيضاً:

مثال:

اذا كان $\int_{٢}^{أ} ٢س\,د\,س = صفر$ ما قيمة أ ؟

مبدئياً — بما أن التكامل = صفر — فإن الحد الأعلى = الحد الأسفل

أي أن أ = ٢ ولكن هذا الجواب الوحيد لقيمة أ لذا يجب الحل هكذا:

$$\int_{٢}^{أ} ٢س\,د\,س = \left[\frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{٢}^{أ} = أ^{٢} - (٢)^{٢} = صفر$$

$$أ^{٢} - ٤ = صفر$$

$$(أ - ٢)(أ + ٢) = صفر$$

∴ أ = ٢ ، - ٢ والجوابان صحيحان، تأكد من ذلك إذا أردت.

(vi) تبديل حدي التكامل المحدود:

إذا أردنا تبديل حدي التكامل المحدود - الأسفل بالأعلى والأعلى بالأسفل- يجب تغيير اشارة التكامل نفسه هكذا:

ليكن ق (س) اقتران قابل للتكامل في الفترة [أ ، ب] فإن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\, د س$$

أي عند تبديل حدي التكامل يجب تغيير اشارة التكامل:

وكذلك $-\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = \int_{ب}^{أ} ق(س)\, د س$

تستخدم هذه الخاصية بالتحديد في تغيير حدود التكامل عندما يكون الحد الأسفل للتكامل أكبر من الحد الأعلى له، لأنه يستحسن أن يكون الحد الأسفل أصغر من الحد الأعلى للتكامل.

وتفسيره سيوضح عند مناقشة المساحات.

مثال:

اذا كان $\int_{٤}^{٢} ق(س)\, د س = -١٠$

فإن $\int_{٢}^{٤} ق(س)\, د س = -\int_{٤}^{٢} ق(س)\, د س = -(-١٠) = ١٠$

(٢٢ - ٣) المعادلات التفاضلية Differential Equations:

حتى نتم مفهوم التكامل بالذات، علينا أن نناقش مفهوماً هاماً في الرياضيات وبفرعه التفاضل والتكامل بالتحديد كونه يربط الأول (التفاضل) بالثاني (التكامل) فيما يسمى المعادلات التفاضلية:

المعادلة التفاضلية: هي المعادلة التي تشتمل على مشتقات (صَ ، $\frac{د ص}{د س}$)

أو تفاضلات (د س ، د ص) كلٍ على انفراد.

حيث: د ص تسمى تفاضله ص

د س تسمى تفاضله س ، أكثر من ذلك لا نُريد التوضيح }

وإذا كانت المشتقات والتفاضلات لاقتران في متغير واحد سُميت المعادلة التفاضلية العادية Ordinary وهذا النوع المناسب فقط في هذا المستوى والذي نريد مناقشته.

أما حل المعادلة التفاضلية فيكمن في ايجاد علاقة بين المتغيرات دون وجود المشتقات أو التفاضلات، ويتم ذلك بواسطة التكامل هكذا:

مثال:

حل المعادلة التفاضلية:

$$٢ \text{ ص د ص} = ٣ \text{ س}^٢ \text{ د س}$$

بتكامل الطرفين $\int ٢ \text{ ص د ص} = \int ٣ \text{ س}^٢ \text{ د س}$

$$\therefore \frac{٢ \text{ ص}^٢}{٢} = \frac{٣ \text{ س}^٣}{٣} + \text{جـ}$$

$$\text{ص}^٢ = \text{س}^٣ + \text{جـ}$$

ومنها $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^٣} + \text{جـ}$

$$\therefore \text{ص} = \text{س}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

واعتماداً على حل المعادلة التفاضلية وبشكل عام يمكن مناقشة التطبيق الهندسي والتطبيق الفيزيائي للتكامل هكذا:

التطبيق الهندسي للتكامل: يعتمد على التكاملين التاليين:

الأول: $\int \text{قَ (س) د س} = \text{ق (س)}$

الثاني: $\int \text{قً (س) د س} = \text{قَ (س)}$ "عكس الاشتقاق"

مثال:

أوجد قاعدة الاقتران ق (س) الذي يمر منحناه بالنقطة أ (- ٢ ، ٩) وحيث ميل المماس عند أي نقطة عليه هو (٣ س - ٢) (س + ٢).

الحل:

بما أن $م_{المماس}$ = قَ (س)

∴ قَ (س) = (٣ س - ٢) (س + ٢)

ومنها ق (س) = ∫ قَ (س) د س = ∫ (٣ س - ٢) (س + ٢) د س

أي أن ق (س) = ∫ (٣ س^٢ + ٤ س - ٤) د س

∴ ق (س) = $\frac{٣س^٣}{٣}$ + $\frac{٤س^٢}{٢}$ - ٤ س + جـ = س^٣ + ٢س^٢ − ٤س + جـ

وبما أن ق (س) يمر منحناه بالنقطة أ (- ٢ ، ٩) فإن ق (- ٢) = ٩

ومنها ق (- ٢) = (- ٢)^٣ + ٢ (- ٢)^٢ − ٤ (- ٢) + جـ = ٩

أي - ٨ + ٨ + ٨ + جـ = ٩

∴ جـ = ٩ − ٨ = ١

∴ ق (س) = س^٣ + ٢ س^٢ − ٤ س + ١ قاعدة الاقتران.

مثال:

إذا كانت النقطة أ (٠ ، ١) نقطة حرجة لكثير الحدود ق (س) وكانت قً (س) = ٣ س + ١ أوجد قاعدة ق (س).

بما أن ∫ قً (س) د س = قَ (س)

فإن ∫ (٣ س + ١) د س = $\frac{٣}{٢}$ س^٢ + س + جـ = قَ (س)

وبما أن (٠ ، ١) نقطة حرجة للاقتران ق (س) فإن قَ (٠) = صفر

(تعريف النقطة الحرجة)

قَ (٠) = $\frac{٣}{٢}$ (٠)^٢ + ٠ + جـ = صفر ⟵ جـ = صفر

∴ ق (س) = $\frac{٣}{٢}$ س^٢ + س

وبما أن $\int$ ق َ(س) د س = ق (س)

$\therefore$ ق (س) = $\int$ ($\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + س) د س

= $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{س^{٣}}{٣}$ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + جـ = $\frac{١}{٢}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + جـ

وبما أن (٠ ، ١) حرجة للاقتران ق (س) فإنه يمر بها ⟵ $\therefore$ ق (٠) = ١

ق (٠) = $\frac{١}{٢}$ (٠)^{٣} + $\frac{١}{٢}$ (٠)^{٢} + جـ = ١ ⟵ جـ = ١

$\therefore$ ق (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ١ قاعدة الاقتران.

وأما التطبيق الفيزيائي للتكامل فيعتمد على التكاملين التاليين أيضاً:

الأول: $\int$ ع · د ن = ف

"عكس الاشتقاق"

والثاني: $\int$ ت د ن = ع

حيث ف = المسافة ، ع = السرعة اللحظية ، ت = التسارع

مثال:

اذا كانت العلاقة بين السرعة اللحظية ع لجسيم يتحرك والزمن ن هي:

ع = ٥ + ٣ ن ،

أوجد العلاقة بين المسافة والزمن اذا قطع الجسم ٢ متر بعد ثانية من حركته.

بما أن ف = $\int$ ع · د ن = $\int$ (٥ + ٣ ن) = ٥ ن + $\frac{٣}{٢}$ ن^{٢} + جـ

وبعد ثانية واحدة فإن:

ف $|_{ن=١}$ = ٥ (١) + $\frac{٣}{٢}$ (١)^{٢} + جـ = ٢ متراً بالزمن

$\therefore$ ومنها جـ = - $\frac{٩}{٢}$

$\therefore$ ف = $\frac{٣}{٢}$ ن^{٢} + ٥ ن − $\frac{٩}{٢}$

هي العلاقة بين المسافة ف والزمن ن .

وبشكل عام وإيجاز هام فإن:

∫ قَ (س) د س = ق (س)

أو ∫ م $_{مماس}$ د س = ق (س)   إذا جاز التعبير ولكنه في الرياضيات يجوز!

حيث قَ (س) المشتقة الأولى، ق (س) الاقتران البدائي أو الأصلي.

وكذلك:

∫ ع · د ن = ف   حيث ع السرعة اللحظية ، ف المسافة.

وكذلك ∫ ق · د ن = ع حيث ت التسارع اللحظي.

مثال:

اذا كان تسارع جسيم ت بعد مرور ن من الثواني يعطى بالقاعدة ف= ٦ ن م/ ث^{٢} فجد المسافة ف التي يقطعها الجسيم بعد مرور ن ثانية من بدء الحركة. علماً بأن السرعة الابتدائية ع$_{(٠)}$ = ٢ م / ث وموقعه الابتدائي ف (٠) = ٥ متر.

بما أن ع = ∫ ت د ن ⟵ فإن ع = ∫ ٦ ن د ن

$\therefore$ ع = ٣ ن^{٢} + جـ   وبما أن ع$_{(٠)}$ = ٢

$\therefore$ ٣ (٠)^{٢} + جـ = ٢

$\therefore$ جـ = ٢

$\therefore$ ع = ٣ ن^{٢} + ٢ م/ث السرعة اللحظية

وبما أن ∫ ع · د ن = ف = ∫ (٣ ن^{٢} + ٢) د ن

∴ ف = $ن^٢$ + ٢ ن + جـ

وبما أن ف (٠) = $(٠)^٢$ + ٢ (٠) + جـ = ٥

∴ جـ = ٥

∴ ف = $ن^٢$ + ٢ ن + ٥ قانون المسافة.

مثال:

يتحرك جسيم بتسارع ثابت مقداره ٤ م/$ث^٢$ فإذا كانت سرعته اللحظية بعد ٢ ثانية من حركته تساوي ١٣ م/ث أوجد سرعته الابتدائية.

أي أن المطلوب $ع_{(٠)}$ أي عندما يكون ساكناً أو عندما ن = صفر

بما أن ع = ∫ت د ن = ∫٤ د ن = ٤ ن + جـ

∴ ع = ٤ ن + جـ

وبعد ٢ ثانية:

$ع|_{ن=١}$ = ٤ (٢) + جـ = ١٣ كما هو معطى

∴ جـ = ٥

∴ ع = ٤ ن + ٥ السرعة اللحظية في أي لحظة

ومنها $ع_{(٠)}$ = $ع|_{ن=١}$ = ٤ (٠) + ٥ = ٥ م/ث

السرعة الابتدائية للجسيم.

(٢٢ – ٤) طرق التكامل:

حتى هذا الحد أصبح مفهوم التكامل واضحاً وبنوعيه المحدود وغير المحدود، والآن دعونا نناقش طرق التكامل وبنوعيه وعددها سبع طرق في هذه السطور:

الطريقة الأولى:

التكامل بالقانون Integration by Rule:

من طرق التكامل والتي تتعلق بالاقترانات الجبرية وعلى وجه الخصوص كثيرات الحدود. "وبعد أن اتضح أن التكامل نوعان محدود وغير محدود" فإن القانون له صيغتان هما:

صيغة القانون للتكامل غير المحدود:

$$\int س^و د س = \frac{س^{و+1}}{و+1} + جـ \quad ، \quad و \neq -1$$

وصيغة القانون للتكامل المحدود:

$$\int_{أ}^{ب} س^و د س = \left[\frac{س^{و+1}}{و+1}\right]_{أ}^{ب} \quad ، \quad و \neq -1$$

$$= \frac{ب^{و+1} - أ^{و+1}}{و+1} \quad \text{"كما مر سابقاً"}$$

مثال:

أوجد $\int س^2 د س$ ، $\int_{1}^{5} س^2 دس$

(1) $\int س^2 د س = \frac{س^{2+1}}{و+1} + جـ = \frac{س^3}{3} + جـ = \frac{1}{3} س^3 + جـ$

(2) $\int_{1}^{5} س^2 د س = \left[\frac{1}{3} س^3\right]_{1}^{5} = \frac{1}{3} \{ (5)^3 - (1)^3 \} = \frac{125 - 1}{3} = \frac{124}{3}$

هذا ويستخدم القانون بصيغتيه (للتكامل غير المحدود والمحدود) لتكامل:

(i) كثيرات الحدود:

مثال:

أو $\int (س^2 + 5 س - 3) د س = \frac{1}{3} س^3 + \frac{5}{2} س^2 - 3 س + جـ$

مثال:

$$\int_{0}^{2} (4\text{س}^{3} - 5\text{س}^{4})\,\text{د س} = \left[\frac{4\text{س}^{4}}{4} - \frac{5\text{س}^{5}}{5}\right]_{0}^{2}$$

$$= \left[\text{س}^{4} - \text{س}^{5}\right]_{0}^{2} = (2)^{4} - (2)^{5} - \text{صفر} = 16 - 32 = -16$$

(ii) تكامل اقتران القيمة المطلقة كما في المثال:

أوجد $\int |\text{س}|\,\text{د س} = \int -\text{س}\,\text{د س} \text{ ، س} < 1 + \int \text{س د س ، س} \geq 1$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\text{س}^{2}}{2} + \text{جـ} \text{ ،} & \text{س} < 1 \\ \dfrac{\text{س}^{2}}{2} + \text{جـ} \text{ ،} & \text{س} \geq 1 \end{cases}$$

ملحوظة:

مشتقة التكامل غير المحدود = ما بداخل القوس (الاقتران الأصلي).

أي أن $\dfrac{\text{د}}{\text{د س}} \int (\text{س}^{2} + 5)\,\text{د س} = \text{س}^{2} + 5$

لكن مشتقة التكامل المحدود = صفر

أي أن $\dfrac{\text{د}}{\text{د س}} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{س}^{2} + 5)\,\text{د س} = \text{صفر}$

لذا يجب التمييز بينهما بكل دقة.

مثال:

أوجد $\int \pi\,\text{د س}$ ، $\int \pi\,\text{د}\,\pi$

أولاً: $\int \pi\,\text{د س} = \pi\,\text{س} + \text{جـ}$ حيث π بالنسبة للتكامل عدد ثابت كونها ليست من نوع التفاضلة <u>د π</u>

ثانياً: لكن $\int \pi\,\text{د}\,\pi = \dfrac{\pi^{2}}{2} + \text{جـ} = \dfrac{1}{2}\,\pi + \text{جـ}$ حيث π بالنسبة للتكامل هي متغير كونها من نوع التفاضلة <u>د π</u>

الطريقة الثانية:

تكامل الاقترانات الدائرية The Trigonometric Integration:

نعتمد في ايجاد تكاملات الاقترانات الدائرية على مشتقاتها كون التكامل عملية عكسية للتفاضل.

لذا سنعرض مشتقات الاقترانات الدائرية كما مرت في حساب التفاضل واعتماداً عليها سنجد تكامل الاقترانات الدائرية كما يلي:

∫ جتا س د س = جا س + جـ ⟵ لأن (جا س)َ = جتا س

وكذلك ∫ جا س د س = − جتا س + جـ ⟵ لأن (جتا س)َ = − جا س

وهكذا سنتوصل الى جدول التكاملات التالي:

باعتبار التكامل عكس التفاضل، فعملية ايجاد التكامل تعاكس عملية ايجاد التفاضل هكذا:

∫ جا س د س = − جتا س + جـ

∫ جتا س د س = جا س + جـ

∫ قا^2 س د س = ظا س + جـ

∫ قتا^2 س د س = − ظتا س + جـ

∫ قا س ظا س د س = قاس + جـ

∫ قتا س ظتا س د س = − ظتا س + جـ

ملحوظة جديرة بالاهتمام:

يمكن ايجاد ∫ ظا س د س ، ∫ قا س د س ، ∫ ظتا س د س ، ∫ قتا س دس ، ليس الآن بل بعد طريقة تكامل الاقتران اللوغارتمي "لذا وجب التنويه!!".

وبعد الاستعانة بالمتطابقات المثلثية (الدائرية) الأساسية يمكن حل الأمثلة التالية:

مثال:

أوجد ∫ ظا^{٢} س د س "هذا التكامل ليس موجوداً بجدول التكاملات" لذا وجب تبديله بما يكافئه من جدول التكاملات هكذا:

نحن نعلم أن $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} + \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ متطابقة مثلثية مشهورة جداً وبعد القسمة على جتا^{٢} س

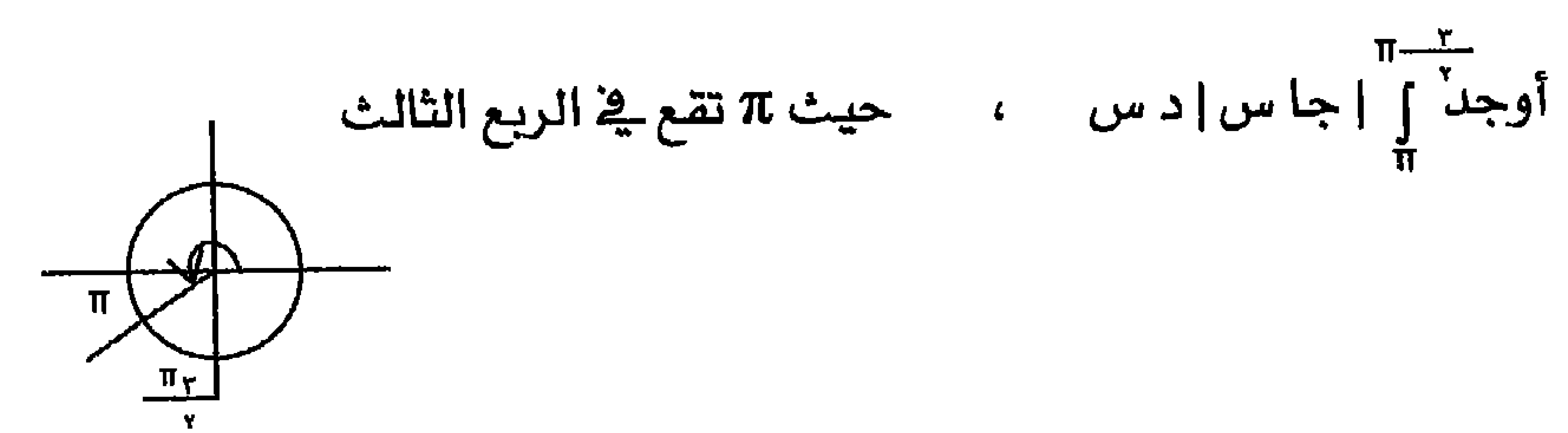
ومنها: ظا^{٢} س + ١ = قا^{٢} س

ظا^{٢} س = قا^{٢} س - ١

∴ ∫ ظا^{٢} س د س = ∫ (قا^{٢} س - ١) د س = ظا س – س + جـ بعد الرجوع الى جدول التكاملات

مثال:

أوجد $\int_{\pi}^{\frac{٣}{٢}\pi}$ | جا س | د س ، حيث π تقع في الربع الثالث



| جا س | = { جا س ، ٠ ≤ π < ١٨٠° (الربع الأول والثاني) القاعدة الأولى
- جاس ، ١٨٠° ≤ π ≤ ٣٦٠° (الربع الثالث والرابع) القاعدة الثانية

هنا نأخذ القاعدة الثانية كون تقع في الربع الثالث:

أي أن $\int_{\pi}^{\frac{٣}{٢}\pi}$ - جا س د س = - (- جتا س)$\Big]_{\pi}^{\frac{٣}{٢}\pi}$ = جتا س$\Big]_{\pi}^{\frac{٣}{٢}\pi}$

= جتا $\frac{٣}{٢}$ π - جتا π = صفر – (- ١) = ١

مثال:

حل المعادلة التفاضلية $\frac{د ص}{د س} = \frac{س}{جتا ص}$ بالضرب التبادلي

جتا ص د ص = س د س وبكامل الطرفين

$\int$ جتا ص د ص= $\int$ س د س

ومنها جا ص = $\frac{1}{2}$ س + جـ

مثال:

اذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق (س) هو ٢ جتاس + جا س وكان منحنى ق (س) يمر بالنقطة (٠ ، ٢) أوجد قاعدة الاقتران ق (س) .

بما أن م المماس = قَ (س) = ٢ جتا س + جا س

فإن ق (س) = $\int$ قَ (س) د س = $\int$ (٢ جتا س + جا س) د س

∴ ق (س) = ٢ جا س – جتا س + جـ

وبما أن ق (س) يمر بالنقطة (٠ ، ٢) فإن ق (٠) = ٢

أي أن ٢ جا صفر – جتا صفر + جـ = ٢

صفر - ١ + جـ = ٢

ومنها جـ = ٣

∴ ق (س) = ٢ جا س – جتا س + ٣ قاعدة الاقتران.

الطريقة الثالثة:

التكامل بالتعويض Integration by Subsititution :

يمكن ايجاد $\int$ (٢ س + ١) د س بالقانون هكذا: $\frac{2}{2}$ س^{2} + س + جـ = س^{2} + س + جـ

ويمكن ايجاد ∫ (٢ س + ١)^{٢} بعد فك القوس وبالقانون هكذا:

$$\int (٤ س^{٢} + ٤ س + ١) د س = \frac{٤ س^{٣}}{٣} + \frac{٤ س^{٢}}{٢} + س + جـ$$

$$= \frac{٤}{٣} س^{٣} + ٢ س^{٢} + س + جـ$$

ثم ايجاد ∫ (٢ س + ١)^{٣} د س بعد فك القوس وبالقانون هكذا:

$$\int (٢ س + ١)^{٣} د س = \int (٨ س^{٣} + ١٢ س^{٢} + ٦ س + ١) د س$$

$$= \frac{٨ س^{٤}}{٤} + \frac{١٢ س^{٣}}{٣} + \frac{٦ س^{٢}}{٢} + س + جـ$$

$$= ٢ س^{٤} + ٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} + س + جـ$$

ومن الصعب ايجاد ∫ (٢ س + ١)^{١٠} د س بنفس الأسلوب، ولكن ليس مستحيلاً باستخدام نظرية ذات الحدين وبما أن العملية طويلة وتستغرق وقتاً كبيراً وشاقة تتطلب جُهداً عسيراً وعلى وحه الخصوص اذا كان أس القوس عدداً كبيراً أو سالباً وتستحيل عملية الضرب تماماً وفك الأقواس اذا كان الأس نسبياً!.

لذلك يبرز السؤال، كيف يمكن اجراء التكاملات التالية:

∫ (٢ س + ١)^{١٠} د س ، ∫ (٢ س + ١)$^{-١٧}$ د س ، ∫ (٢ س + ١)$^{\frac{٢}{٩}}$ د س وأشباهها؟

لهذا السبب نستخدم بعض الأساليب الأخرى والتي بواسطتها تحويل المقدار الجبري داخل القوس الى صورة تكافئه وبسيطه كحد واحد مشابه للصورة ق (س) = س^{ن} بحيث يسهل تكاملها، ومن هذه الأساليب "التكامل بالتعويض".

والجدير بالذكر أن هذه الطريقة تستخدم لتكامل حاصل ضرب اقترانين من نفس النوع شرط أن يظهر أحدهما في مشتقه الثاني كما في الأمثلة التالية:

مثال:

أوجد $\int$ جا س جتا س د س

بما أن جتا س تظهر في مشتقة جا س فإننا:

نفرض أن ص = جا س

ومنها $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جتا س}}{1}$ وبالضرب التبادلي

جتا س د س = ١ د ص

$\therefore$ د س = $\frac{1}{\text{جتا س}}$ د ص

نعود الى السؤال: $\int$ جا س جتا س د س = $\int$ ص × جتا س × $\frac{1}{\text{جتا س}}$ د ص

= $\int$ ص د ص = $\frac{\text{ص}^2}{2}$ + جـ

ثم نعيد فيه ص = جا س

$\therefore \int$ جا س جتا س د س = $\frac{(\text{جا س})^2}{2}$ + جـ = $\frac{1}{2}$ جا^2 س + جـ

مثال:

أجرِ التكامل $\int$ (٢ س + ١)^9 د س

نفرض أن ما بداخل القوس = ص

$\therefore$ ص = ٢ س + ١ وباشتقاق الطرفين لاستبدال د س بـ د ص هكذا:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{2}{1}$ ⟵ ٢ د س = ١ د ص ⟵ د س = $\frac{1}{2}$ د ص

$\int$ (٢ س + ١)^9 د س = $\frac{1}{2} \int$ ص^9 د ص = $\frac{1}{2}$ × $\frac{\text{ص}^{10}}{10}$ + جـ

= $\frac{1}{20}$ (٢ س + ١)^{10} + جـ

ملحوظة:

ويمكن اجراء تكامل الاقتران الخطي فقط مرفوعاً لأي قوة مثل ن مباشرة هكذا:

$$\int (أ\,س + ب)^{ن}\, د\,س = \frac{1}{أ} \times \frac{(أ\,س + ب)^{ن+1}}{ن + 1} + جـ$$

ومثاله:

$$\int (2\,س + 5)^{17}\, د\,س = \frac{1}{2}\, \frac{(2\,س + 5)^{18}}{18} + جـ$$

$$= \frac{1}{36}\, (2\,س + 5)^{18} + جـ$$

مثال:

أوجد $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\,س + 1}}\, د\,س$

$$\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\,س + 1}}\, د\,س = \int_{0}^{4} \frac{1}{(2\,س + 1)^{\frac{1}{2}}}\, د\,س = \int_{0}^{4} (2\,س + 1)^{-\frac{1}{2}}\, د\,س$$

ومباشرة لأنه خطي $= \left[\frac{\frac{1}{2}(2\,س + 1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2} + 1}\right]_{0}^{4} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{(2\,س + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{0}^{4}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \left[\sqrt{2\,س + 1}\right]_{0}^{4} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2$$

مثال:

أوجد $\int جتا\, 5\,س\, د\,س$.

نفرض أن $ص = 5\,س \longrightarrow \frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{5}{1} \longrightarrow د\,س = \frac{1}{5}\, د\,ص$

ومنها $\int جتا\, 5\,س\, د\,س = \frac{1}{5} \int جتا\, ص\, د\,ص = \frac{1}{5} \times جا\, ص + جـ$

$= \frac{١}{٥}$ جا ٥ س + جـ

وهذه النتيجة تؤدي الى قاعدة عامة في تكامل الاقترانات الدائرية المركبة، مباشرة عندما يكون معامل الزاوية أكبر من ١ . هكذا:

$\int$ جا (أ س + ب) د س = $\frac{١}{\text{معامل الزاوية}}$ × (جتا (أ س + ب)) + جـ

$= - \frac{١}{أ}$ جتا (أ س + ب) + جـ

وكذلك $\int$ جتا (أ س + ب) د س = $\frac{١}{أ}$ جا (أ س + ب) + جـ

أو بالتعويض

مثال:

أوجد $\int$ جا ٧ س د س مباشرة.

$\int$ جا ٧ س د س = $\frac{١}{\text{معامل الزاوية}}$ × (- جتا ٧ س) + جـ

$= - \frac{١}{٧}$ جتا ٧ س + جـ

وجاء الآن دور تكامل الاقترانات الدائرية المرفوعة لأسس، مثل كيف تكامل:

$\int$ جا^{ن} س د س وكذلك $\int$ جتا^{ن} س د س ؟

الجواب:

نذيب القوى أو الأسس كلياً أو جزئياً ثم نستخدم طريقة التكامل بالقانون أو بالتعويض حسب المطلوب.

ولتذويب الأسس أو القوى نستخدم المتطابقين:

الأولى: جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١ للاذابة الجزئية عندما ن عدد فردي.

والثانية: جتا ٢ س = جتا^{٢} س – جا^{٢} س

أو = ٢ جتا^{٢} س - ١

أو = ١ - ٢ جا^{٢} س للاذابة الكلية عندما ن عدد زوجي

كما في الأمثلة:

مثال:

أجرِ ∫ جا^{٢} س د س هنا نذيب الأس كلياً من المتطابقة الثانية.

جتا ٢ س = ١ - ٢ جا^{٢} س ⟵ ٢ جا^{٢} س = ١ – جتا ٢ س

جا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س "عندما تكون القوة أو الأس زوجية نذيبها كلياً باستخدام جتا ٢ س"

∴ ∫ جا^{٢} س د س = ∫ ($\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س) د س

= $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + جـ

= $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + جـ

مثال:

أجر ∫ جتا^{٣} س د س

نبسطها هكذا ∫ جتا^{٣} س د س = ∫ جتا^{٢} س جتا س د س

وهنا القوة فردية نذيبها جزئياً من جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

∴ جتا^{٢} س = ١ – جا^{٢} س د س وذلك بجعل أحد الاقترانين يظهر في مشتقه الآخر هكذا:

∴ $\int$ جتا^{٣}س د س = $\int$ جتا س (١ − جا^{٢} س) د س

= $\int$ (جتا س − جتا س جا^{٢} س) د س

= جا س - $\int$ جتا س جا^{٢}س د س ... (١)

وباستخدام التعويض $\int$ جتا س جا^{٢}س د س = $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س + جـ

بعد فرض ص = جا س

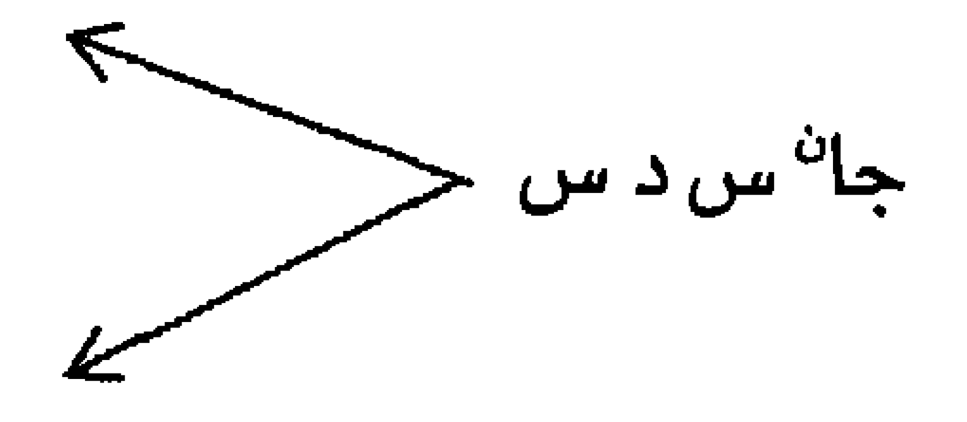
∴ $\int$ جتا^{٣} س د س = نعوض في ... (١)

= جا س − ($\frac{١}{٣}$ جا^{٣} س + جـ)

= جا س - $\frac{١}{٣}$ جا^{٣}س + جـ

ملحوظة:

ملخص مفيد بالرموز: لإذابة القوى نستخدم



جا^{ن} س د س

عندما ن فردية تستخدم اذابة جزئية

من جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١

عندما ن زوجية تستخدم اذابة كلية

من جتا٢س = جتا^{٢} س − جا^{٢}س

= ٢ جتا^{٢} س − ١

= ١ − ٢ جا^{٢} س

وكذلك جتا^{ن}س د س وبنفس الأسلوب.

مثال:

أوجد $\int$ س$^{٥}\sqrt{\text{س}^{٣} + ٢}$ د س

نفرض $ص = س^{٣} + ٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س^{٢}}{١}$

$٣س^{٢} \cdot دس = ١\ دص$

$دس = \frac{١}{٣س^{٢}}\ دص$

$= \int س^{٥} \sqrt{ص} \times \frac{١}{٣س^{٢}}\ دص$

$= \int س^{٣} \sqrt{ص} \times \frac{١}{٣}\ دص$

$= \frac{١}{٣} \int س^{٣} \sqrt{ص}\ دص$

لكن $ص = س^{٣} + ٢$ بالفرض

$\therefore\ س^{٣} = ص - ٢$

$\therefore\ \frac{١}{٣} \int س^{٣} \sqrt{ص}\ دص$

$= \frac{١}{٣} \int (ص - ٢) \sqrt{ص}\ دص$

$= \frac{١}{٣} \int (ص - ٢)\ (ص)^{\frac{١}{٢}}\ دص$

$= \frac{١}{٣} \int (ص^{\frac{٣}{٢}} - ٢ص^{\frac{١}{٢}})\ دص$

$= \frac{١}{٣} [\frac{٢}{٥} ص^{\frac{٥}{٢}} - ٢ \times \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}}] + جـ$

$= \frac{١}{٣} [\frac{٢}{٥} \sqrt{ص^{٥}} = \frac{٤}{٣} \sqrt{ص^{٣}} + جـ]$

$= \frac{٢}{١٥} \sqrt{ص^{٥}} - \frac{٤}{٩} \sqrt{ص^{٣}} + جـ$

$= \frac{٢}{١٥} \sqrt{(س^{٣} + ٢)^{٥}} = \frac{٤}{٩} \sqrt{(س^{٣} + ٢)^{٣}} + جـ$

الطريقة الرابعة:

التكامل بالأجزاء Integration by Parts:

انها طريقة عامة للتكامل ولحاصل ضرب اقترانين وان كانا مختلفين بالنوع دون مقدمات، ندوّن القاعدة التالية والمسماة:

قاعدة التكامل بالأجزاء:

والمتعلقة بالاقترانين ق (س) ، هـ (س) القابلين للتكامل:

∫ق · د هـ = ق · هـ - ∫هـ · د ق   حيث هـَ (س) د س = د هـ

قَ (س) د س = د ق

وهكذا فلتكامل الأجزاء ننتج تكامل آخر، لذا وجب التنويه والاستمرار بالتكامل حتى النهاية.

والتفسير لغوياً:

∫ق (س) · مشتقة هـ (س) = ق (س) · هـ (س) – ∫هـ (س) · مشتقة ق (س).

مثال:

أوجد ∫س جا س د س

"مع ملاحظة أن ايجاد التكامل بالتعويض مستحيل كون أحدهما لا يظهر في مشتقه الآخر بأي حال من الأحوال لأن الاقتراانين س ، جا س ليسا من نوع واحد كما ترى".

نفرض س = ق   كما نفرض ∫د هـ = ∫جا س د س

∴ د س = د ق   هـ = - جتا س

نطبق القاعدة:

∫س جا س د س = ق · هـ - ∫هـ · د ق · س (- جتا س) - ∫- جتا س د س

= - س جتا س + ∫جتا س د س = - س جتا س + جا س + جـ

مثال:

أوجد $\int_{٠}^{١} س\,(س + ١)^{\frac{١}{٢}}\, د\,س$

ق = س $\qquad\qquad \int د\,هـ = \int (س + ١)^{\frac{١}{٢}}\, د\,س$

د ق = د س $\qquad\qquad هـ = \dfrac{(٢\,س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{١}{٢}} = \dfrac{٢}{٣}\,(س + ١)^{\frac{٣}{٢}}$

ومنها:

$$\int_{٠}^{١} س\,(س + ١)^{\frac{١}{٢}}\, د\,س = س \times \frac{٢}{٣}\,(س + ١)^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٠}^{١} - \int_{٠}^{١} \frac{٢}{٣}\,(س + ١)^{\frac{٣}{٢}}\, د\,س$$

$$= \frac{٢}{٣}\, س \sqrt[٢]{(س + ١)^{٣}} - \frac{٤}{١٥}\sqrt{(س + ١)^{٥}} \Big]_{٠}^{١} = -\frac{٢٨}{١٥}\sqrt{٢}$$

بعد التعويض والتبسيط

ملحوظة:

حتى لا نحتار عند اختيار أي من الاقترانين ليكون ق وأيهما ليكون د هـ:

الاقتران سهل الاشتقاق افرضه ق لأننا نريد مشتقته.

والاقتران سهل التكامل افرضه د هـ لأننا نريد تكامله.

وهذا لا يمنع أن التكامل بالاجزاء يمكن أن يستمر بنفس السؤال لأكثر من مرة واحدة كما في المثال:

مثال:

أوجد $\int س^{٢}$ جتا س د س

افرض ق = $س^{٢}$ $\qquad\qquad \int د\,هـ = \int$ جتا س د س

د ق = ٢ س ۰ د س $\qquad\qquad$ هـ = جا س

∴ ∫ س^{٢} جتا س د س = س^{٢} جا س - ∫ جا س × ٢ س د س

= س^{٢} جا س - ٢ ∫ س جا س د س .... (١)

ثم نكامل س جا س د س بالأجزاء مرة أخرى كما مرّ سابقاً

لتكون ∫ س جا س د س = - س جتا س + جا س + جـ

وبعد التعويض في ... (١)

ومنها ∫ س^{٢} جتا س د س = س^{٢} جا س + ٢ س جتا س - ٢ جا س + جـ

بعد التكامل بالأجزاء مرتين.

ملحوظة:

ما العلاقة بين طريقتي التكامل بالتعويض والتكامل بالأجزاء؟ ومتى يمكن استخدام كل منهما؟

تعتبر طريقتا التعويض والاجزاء من الطرق العامة لتكامل حاصل ضرب اقترانين ولكن طريقة التعويض مشروطة بأن يظهر أحد الاقترانين في مشتقة الآخر، لذا يجب أن يكون الاقترانان من نوع واحد كأن يكونا جبريان أو دائريان.

ولكن طريقة الأجزاء لا شرط لها على الاطلاق، لذلك فهي أكثر عمومية من طريقة التعويض.

وأخيراً يمكن أن تشترك الطريقتان معاً في سؤال واحد كما في المثال:

مثال:

أوجد ∫ جا$\sqrt{\text{س}}$ د س

أولاً: نبدأ بالتعويض: ص = $\sqrt{\text{س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ ⟵ د س = ٢$\sqrt{\text{س}}$ د ص

⟵ د س = ٢ ص د ص

$\int$ جا$\sqrt{س}$ د س = $\int$ جا ص × ٢ ص د ص

= ٢ $\int$ ص جا ص د ص

وبتكامل ص جا ص بالأجزاء مرة أخرى كما مرّ سابقاً

فإن: $\int$ ص جا ص د ص = - ٢ ص جتا ص + ٢ جا ص

$\therefore$ $\int$ جا$\sqrt{س}$ د س = -$\sqrt{س}$ جتا$\sqrt{س}$ + ٢ جا$\sqrt{س}$ + جـ

الطريقة الخامسة:

تكامل الاقتران اللوغارتي الطبيعي ق (س) = لو$_{هـ}$ س

نعود ثانية الى القانون العام لتكامل الاقترانات الجبرية وهو:

س^{و} د س = $\frac{س^{و+١}}{و+١}$ + جـ ، و $\neq$ - ١ والآن لماذا و $\neq$ - ١ ؟

التفسير عندما و = - ١ هنا تكمن المشكلة:

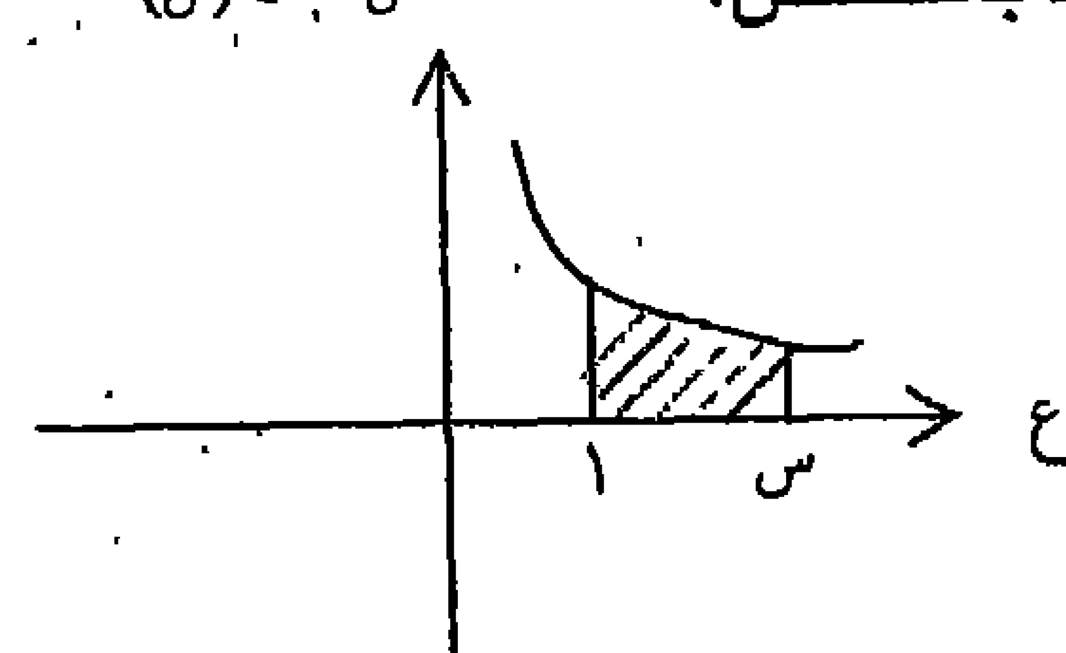
لأن $\int$ س$^{-١}$ د س = $\frac{س^{-١+١}}{-١+١}$ + جـ = $\frac{س^{٠}}{٠}$ + جـ

والمقدار $\frac{س^{٠}}{٠}$ غير معرّف اطلاقاً كون المقام = صفر

والسؤال الآن: كيف يمكن ايجاد $\int$ س$^{-١}$ د س = $\int$ $\frac{١}{س}$ د س ؟

والجواب: لإيجاد $\int$ $\frac{١}{س}$ د س لا بُد من تعريف اقتران جديد كما يلي:

ليكن ص = $\frac{١}{ع}$ والممثل منحناه بالشكل:



والمنطقة المظللة فيه والمحصورة بين ص = $\frac{١}{ع}$ ومحور العينات والمستقيمين ع = ١ ، ع = س حيث س > ١ هي $\int_{١}^{س} \frac{١}{ع}$ د ع ويسمى هذا الاقتران بالاقتران الذي متغيره الحد الأعلى اقتران لوغارتي.

طبيعي ويرمز له بالرمز $لو_{هـ}$ س

أي أن $\int_{١}^{س} \frac{١}{ع}$ د ع = $لو_{هـ}$ س

ويمكن كتابة التكامل التالي مباشرة:

$\int \frac{١}{س}$ د س = $لو_{هـ}$ س + جـ ٠٠٠٠٠٠٠ (١)

حيث البسط (١) هو مشتقة المقام (س) وهذه الحالة الخاصة للتكامل.

وبشكل عام فإن:

$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}$ د س = $لو_{هـ}$ (ق (س)) + جـ وهي الحالة العامة للتكامل.

مثال:

$\int \frac{٢ س}{س^{٢} + ٥}$ د س = $لو_{هـ}$ ($س^{٢}$ + ٥) + جـ لأن البسط مشتق المقام

وكذلك $\int \frac{س^{٢}}{س^{٣} + ٧}$ د س = $\frac{١}{٣} \int \frac{٣ س^{٢}}{س^{٣} + ٧}$ د س حيث جعلنا البسط = مشتق المقام

= $\frac{١}{٣}$ $لو_{هـ}$ ($س^{٣}$ + ٧) + جـ

وبشكل خاص يمكن ايجاد تكامل مقلوب الاقتران الخطي كما يلي:

"أو بالتعويض"

$\int \frac{١}{أ س + ب}$ د س = $\frac{١}{أ}$ $لو_{هـ}$ (أ س + ب) + جـ

حيث جعلنا البسط مشتقة المقام: $\int \frac{١}{أ س + ب}$ د س = $\frac{١}{أ} \int \frac{١ \times أ}{أ س + ب}$ د س

= $\frac{١}{أ}$ $لو_{هـ}$ (أ س + س) + جـ

مثال:

$\int \frac{1}{3س + 2}$ د س = $\frac{1}{3}$ لو$_{هـ}$ (٣ س + ٢) + جـ "أو التعويض"

مثال:

أوجد $\int_{1}^{هـ}$ لو$_{هـ}$ س د س ، س > صفر

وهذا ممكن وضعه هكذا $\int_{1}^{هـ}$ (١) لو$_{هـ}$ س د س ، س > صفر

هنا التكامل بالأجزاء.

ق = لو$_{هـ}$ س لأنه سهل الاشتقاق $\int$ د هـ = $\int$ ١ د س لأنه سهل التكامل

د ق = $\frac{1}{س}$ د س هـ = س

وبتطبيق قاعدة الأجزاء:

$\int$ ق · د هـ = ق · هـ - $\int$ هـ · د ق

أي أن $\int_{1}^{هـ}$ (١) لو$_{هـ}$ س د س = س لو$_{هـ}$ س$]_{1}^{هـ}$ - $\int$ س × $\frac{1}{س}$ د س

= س لو$_{هـ}$ س$]_{1}^{هـ}$ - $\int_{1}^{هـ}$ ١ د س = س لو$_{هـ}$ س − س$]_{1}^{هـ}$

= هـ لو$_{هـ}$ هـ - هـ - ١ لو$_{هـ}$ ١ + ١

= هـ (١) − هـ - صفر + ١ = ١

والآن يمكن ايجاد تكاملات الاقترانات الدائرية التالية:

ق$_{1}$ (س) = ظا س

ق$_{2}$ (س) = ظتا س

ق$_{3}$ (س) = قا س

$ق_{٤}(\text{س}) = \text{قتا س}$ هكذا

$\int \text{ظا س د س} = \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \text{ د س}$ ولأن البسط يظهر في مشتقة المقام

فإن $\int \text{ظا س د س} = \int \frac{-\text{جا س}}{\text{جتا س}} \text{ د س} = -\text{ لو}_{هـ} \text{ جتا س} + \text{جـ}$

وكذلك $\int \text{ظتا س د س} = \int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} \text{ د س} = \text{لو}_{هـ} \text{ جا س} + \text{جـ}$

لكن $\int \text{قا س د س} = \int \text{قا س} \times \left(\frac{\text{قا س + ظا س}}{\text{قا س + ظا س}}\right)$ بعد ضرب البسط والمقام × (قاس + ظا س)

$= \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{ س + قا س ظا س}}{\text{قا س + ظا س}} \text{ د س}$ فأصبح البسط مشتقه المقام

$= \text{لو}_{هـ} (\text{قا س + ظا س}) + \text{جـ}$

وكذلك $\int \text{قتا س د س} = \int \frac{\text{قتا س (قتا س+ ظتا س)}}{\text{قتا س + ظتا س}}$ د س بعد ضرب البسط والمقام × (قتا س × ظتا س)

= فأصبح البسط ومشتقه المقام

$\therefore \int \text{قتا س دس} = \text{لو}_{هـ} (\text{قتا س + ظتا س}) + \text{جـ}$

الطريقة السادسة:

"تكامل الاقتران الأسي الطبيعي" $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$:

انه الاقتران الأسي الطبيعي $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$ حيث هـ العدد النامبيري كما مرّ سابقاً.

والآن $\int \text{هـ}^{\text{س}} \text{ د س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$ الاقتران نفسه وهذه حالة خاصة

وبشكل عام:

$\int$ قَ (س) هـ$^{ق(س)}$ د س = هـ$^{ق(س)}$ + جـ وهذه حالة عامة.

مثال:

أوجد $\int$ ٢ س هـ$^{س^٢}$ د س باستخدام القانون لأن المعامل هو مشتقة الأس.

= $\int$ ٢ س هـ$^{س^٢}$ د س = هـ$^{س^٢}$ + جـ

وكذلك $\int$ ٥ س^٢ هـ$^{س^٣}$ د س نجعله بصورة المُعامل مشتقه الأس هكذا:

$\frac{٥}{٣}$ $\int$ ٣ س^٢ هـ$^{س^٣}$ د س = $\frac{٥}{٣}$ هـ$^{س^٣}$ + جـ

وفي هذا السياق لا بد من توضيح التكامل المتكرر أو تكرار التكامل Frequent Integration انه تكامل يتكرر بنفس الكيفية ولا يمكن التوصل الى نهاية له على الاطلاق كما في المثال:

أوجد $\int$ هـ^{س} جا س د س ، بالأجزاء كما يلي:

نفرض: ق = هـ^{س}

د ق = هـ^{س} · د س

ونفرض: $\int$ د هـ = $\int$ جا س د س

هـ = - جتا س

وبتطبيق القاعدة:

$\int$ ق · د هـ = ق · هـ - $\int$ هـ · د ق بالأجزاء

فإن $\int$ جا س د س = (هـ^{س}) (- جتا س) – (- جتا س) (هـ^{س}) د س

= - هـ^{س} جتا س + $\int$ هـ^{س} جتا س ···· (١)

ثم نكرر الأجزاء ثانية لتكامل $\int$ هـ^{س} جتا س د س

ق = هـ^{س} $\qquad\qquad$ $\int$ د هـ = $\int$ جتا س د س

د ق = هـ^{س} د س $\qquad\qquad$ هـ = جا س

$\therefore$ $\int$ هـ^{س} جا س د س = − هـ^{س} جتا س + $\int$ + هـ^{س} جا س − $\int$ هـ^{س} جا س د س $\int$

$\therefore$ $\int$ هـ^{س} جا س د س = − هـ^{س} جتا س + هـ^{س} جا س − $\int$ هـ^{س} جا س د س

ومن الملاحظ أننا انتهينا من حيث بدأنا، لذا لا نكرر التكامل اطلاقاً بل بنسب هكذا:

$\int$ هـ^{س} جا س د س + هـ^{س} جا س = هـ^{س} جا س − هـ^{س} جتا س $\qquad$ نبسط ونرتب

$\therefore$ ٢ $\int$ هـ^{س} جا س د س = هـ^{س} (جا س − جتا س)

$\therefore$ $\int$ هـ^{س} جا س د س = $\frac{١}{٢}$ هـ^{س} (جا س − جتا س)

مثال:

حل المعادلة التفاضلية د ص = ص د س

بالقسمة على ص لجعل الكل متغير وتفاضله على طرف هكذا:

$\frac{د ص}{ص}$ = د س $\qquad\qquad$ $\frac{١}{ص}$ د ص = د س

وبتكامل الطرفين:

$\int \frac{١}{ص}$ د ص = $\int$ ١ د س

لو$_{هـ}$ ص = س + جـ

ومنها وحسب قوانين الأسس واللوغارتمات وجعل الصورة اللوغارتمية بالصورة الأسية هكذا:

ص = هـ^{س} + جـ

مثال:

أوجد $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$ جا س هـ$^{-\text{جتا (س)}}$ د س

نضع الاقتران بصورة المعامل مشتقه الأس هكذا:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا س هـ}^{-\text{جا (س)}} \text{ د س} = \left[\text{هـ}^{-\text{جتا (س)}}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{\text{هـ}^{\text{جتا س}}}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\text{هـ}^{\text{جتا}\frac{\pi}{2}}} - \frac{1}{\text{هـ}^{\text{جتا}\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\text{هـ}^{0}} - \frac{1}{\text{هـ}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\text{هـ}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} = 1 - \text{هـ}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

الطريقة السابعة:

التكامل بالكسور الجزئية Integration by Partial Fractions:

وهي طريقة لتكامل الاقترانات النسبية التي بسطها لا يظهر في مشتقه مقامها.

وملخصها: نجزئ الاقتران النسبي الى اقترانات جزئية أخرى بحيث يصبح بسط كل منها يظهر في مشتقه مقامه، ثم نطبق القانون.

$$\int \frac{\text{قَ (س)}}{\text{ق (س)}} \text{ د س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{(ق (س))} + \text{جـ}$$

شرط أن يكون مقام الاقتران النسبي كثير حدود وتربيعي وقابل للتحليل الى اقترانات خطية غير متطابقة.

ويمكن أن ينشأ وضعان لهذه الحالة:

الوضع الأول: عندما تكون درجة البسط أقل من درجة المقام، عندها نبدأ نجزئ الاقتران النسبي كما يلي:

مثال:

أوجد $\int \frac{\text{٢ س} + ١}{\text{س}^{٢} - ١} \, \text{د س}$

أولاً: نجزئ $\frac{\text{٢ س} + ١}{\text{س}^{٢} - ١} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + ١} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ١}$

أي أن $\frac{\text{٢ س} + ١}{\text{س}^{٢} - ١} = \frac{\text{أ (س} - ١) + \text{ب (س} + ١)}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)}$ بعد تجميع الطرف الأيسر

ولإيجاد قيمة أ نعوض س = - ١ حتى نعدم ب وليصبح معادلها صفراً.

أي أن $٢ (-١) + ١ = \text{أ} (-١ - ١) + \text{ب} (-١ + ١)$

ومنها $-١ = -٢ \text{أ} \longrightarrow \text{أ} = \frac{١}{٢}$

ولإيجاد ب نعدم أ ونعوض س = ١

$٢ (١) + ١ = \text{أ} (١ - ١) + \text{ب} (١ + ١)$

ومنه $٣ = ٢ \text{ب} \longrightarrow \text{ب} = \frac{٣}{٢}$

أي أن $\int \frac{\text{٢ س} + ١}{\text{س}^{٢} - ١} \, \text{د س} = \int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س} + ١} \, \text{د س} + \int \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س} - ١} \, \text{د س}$

$= \frac{١}{٢} \int \frac{١}{\text{س} + ١} \, \text{دس} + \frac{٣}{٢} \int \frac{١}{\text{س} - ١} \, \text{د س}$

$= \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + ١) + \frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - ١) + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}} + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= \text{لوهـ} (\text{س} + ١)^{\frac{١}{٢}} (\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$ كلوغارتم واحد

الوضع الثاني: عندما تكون درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام، عندها نقسم البسط على المقام -قسمة طويلة أو تركيبية- لنحصل على اقترانات نسبية أو غير نسبية هكذا:

مثال:

أوجد $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س} - ١}\, \text{د س}$ "درجة البسط أكبر من درجة المقام"

بالقسمة الطويلة

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^{٢} + \text{س} + ٢ & \\ \hline \text{س}^{٢} + \text{س} & \text{س} - ١ \\ \mp \text{س}^{٢} \pm \text{س} & \\ \hline \text{س}^{٢} + \text{س} & \\ \mp \text{س}^{٢} \pm \text{س} & \\ \hline ٢\,\text{س} & \\ \mp ٢\,\text{س} \pm ٢ & \\ \hline ٢ & \text{الباقي} \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س} - ١} = \int (\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢)\, \text{د س} + \int \frac{٢}{\text{س} - ١}\, \text{د س}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س} + ٢\, \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - ١)$$

$$= \frac{١}{٣} \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢} \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}} (\text{س} - ١)^{٢} + \text{جـ} .$$

مثال:

أوجد $\int_{٢}^{٣} \frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س}^{٢} - ١}\, \text{د س}$ "درجة البسط = درجة المقام"

بالقسمة الطويلة

$$\begin{array}{r|l} ١ & \\ \hline \text{س}^{٢} + ١ & \text{س}^{٢} - ١ \\ \mp \text{س}^{٢} \pm ١ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$\int_{٢}^{٣} \frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س}^{٢} - ١}\, \text{د س} = \int_{٢}^{٣} \left(١ + \frac{٢}{\text{س}^{٢} - ١}\right) \text{د س}$$

والآن نجزئ $\frac{٢}{\text{س}^{٢} - ١} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + ١} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ١}$

$$\frac{٢}{\text{س}^{٢} - ١} = \frac{\text{أ}\,(\text{س} - ١) + \text{ب}\,(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)}$$

لإعدام أ نفرض س = ١

$$\therefore ٢ = \text{أ}\,(١ - ١) + \text{ب}\,(١ + ١) \longrightarrow \text{ب} = \frac{٢}{٢} = ١$$

لإعدام ب نفرض س = − ١

$$٢ = أ\,(-١ - ١) + ب\,(-١ + ١) \longrightarrow ب = -١$$

$$\therefore \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١} = ١ - \frac{١}{س + ١} + \frac{١}{س - ١}$$

$$\therefore \int_{٢}^{٣} \frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}\, دس = \int_{٢}^{٣} ١\, دس - \int_{٢}^{٣} \frac{١}{س + ١}\, دس + \int_{٢}^{٣} \frac{١}{س - ١}\, دس$$

$$= ١\,(٣ - ٢) - \text{لو}\,(س + ١)\Big]_{٢}^{٣} + \text{لو}\,(س - ١)\Big]_{٢}^{٣}$$

$$= ١ - \text{لو}_{هـ}\,٤ + \text{لو}_{هـ}\,٣ + \text{لو}_{هـ}\,٢ - \text{لو}_{هـ}\,١ = ١ - \text{لو}_{هـ}\,٤ + \text{لو}_{هـ}\,٣ + \text{لو}_{هـ}\,٢$$

$$= ١ - \text{لو}_{هـ}\,٤ + \text{لو}_{هـ}\,٣ \times ٢ = ١ - \text{لو}_{هـ}\,٤ + \text{لو}_{هـ}\,٦$$

$$= ١ + \text{لو}_{هـ}\,٦ - \text{لو}_{هـ}\,٤ = ١ + \text{لو}_{هـ}\,\frac{٦}{٤} = ١ + \text{لو}_{هـ}\,\frac{٣}{٢}$$

(٢٢ - ٥) تطبيقات التكامل:

للتكامل المحدود بالذات عدة تطبيقات، منها ايجاد المساحات وقوانين النمو والاضمحلال المرتبطة بالأسس واللوغارتمات، ثم الايراد كتطبيق على موضوع الاقتصاد.

سنناقشها في هذه السطور:

أولاً: المساحات Areas:

من تطبيقات التكامل المحدود العديدة والأكثر ارتباطاً بالرياضيات موضوع المساحات، لذا سنناقشه بشيء من التفصيل هكذا:

من المعروف أن مساحة المربع = الضلع × نفسه

ومساحة المستطيل = الطول × العرض

ومساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

وهكذا لبقية الأشكال الهندسية المضلعة والمنتظمة.

والآن يطفو على السطح هذا السؤال:

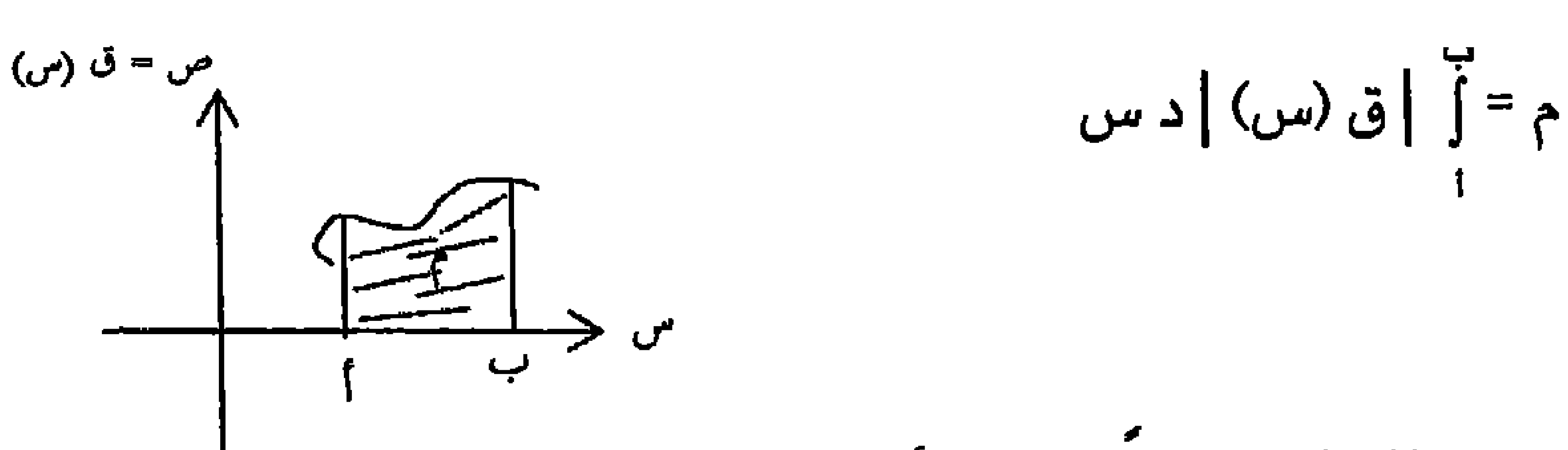
كيف نجد مساحة المنطقة غير المضلعة أو المضلعة في جزء منها؟

والجواب المباشر: بواسطة التكامل المحدود (عند معرفة حدود التكامل الأسفل والأعلى).

والسؤال الذي يليه، كيف يتم ذلك؟

والجواب: كما سيتضح في الحالات التالية:

(i) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق (س) ومحور السينات، والمستقيمين س = أ ، س = ب كما في الشكل.



$$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, د\, س$$

كون المساحة دائماً موجبة لأنها كمية غير متجهة.

مثال:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س^{٢} ومحور السينات في الفترة [١ ، ٣]

"الرسم ضروري لتحديد المنطقة المراد ايجاد مساحتها"

$$م = \int_{١}^{٣} |س^{٢}|\, د\, س = \left[\frac{س^{٣}}{٣}\right]_{١}^{٣}$$

$$= \frac{(٣)^{٣}}{٣} - \frac{(١)^{٣}}{١} = \frac{٢٧}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٢٦}{٣} \text{ وحدة مساحة.}$$

مثال:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $س^٢ - ٢٥$ ومحور السينات.

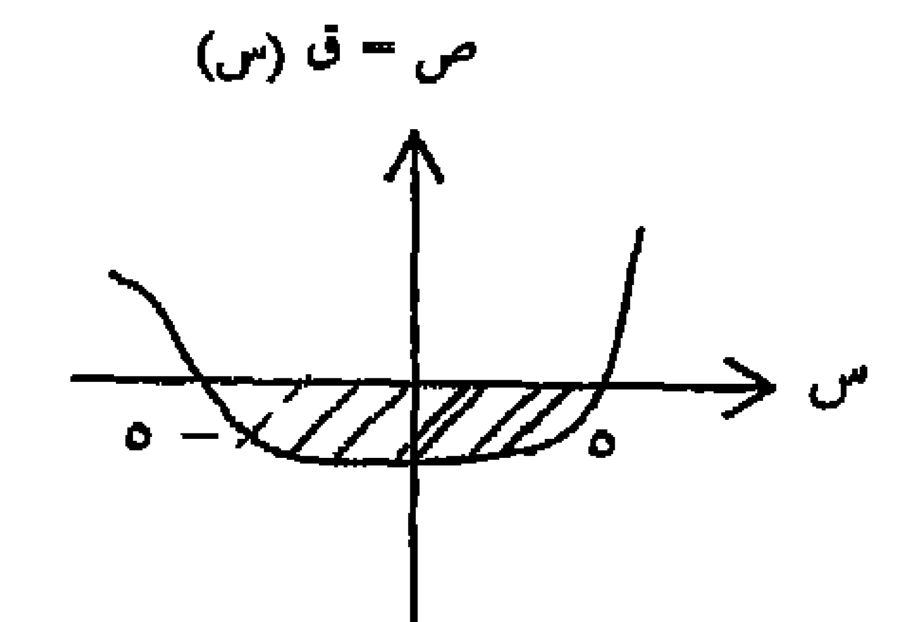
الحل:

هنا حدود التكامل غير معروفة لذا نُصفر الاقتران لمعرفها كما يلي:

$س^٢ - ٢٥$ = صفر ، (س + ٥) (س - ٥) = صفر

ص = - ٥ ، ٥ صور التكامل

والرسم كما في الشكل:



$م = \int_{-٥}^{٥} | س^٢ - ٢٥ | \, د س$

$= \left[\frac{س^٣}{٣} - ٢٥ س \right]_{-٥}^{٥} = \left(\frac{١٢٥}{٣} - ١٢٥ \right) - \left(\frac{-١٢٥}{٣} + ١٢٥ \right)$

$= \frac{١٢٥}{٣} - ١٢٥ + \frac{١٢٥}{٣} - ١٢٥ = \frac{٢٥٠}{٣} - \frac{٢٥٠}{١} = \frac{٢٥٠ - ٧٥٠}{٣}$

$= \left(\frac{-٥٠٠}{٣} \right) = \frac{٥٠٠}{٣}$ وحدة مساحة

كون المساحة دائماً موجبة وليست سالبة أو صفراً على الاطلاق.

ملحوظة:

يجب ملاحظة فيما اذا كان منحنى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات في نقطة تقع بين حدي التكامل [أ ، ب] فإذا حصل ذلك فإن المنطقة المحصورة بين محنى الاقتران ق (س) ومحور السينات تحدد مساحتين، فكأننا نجزي التكامل بخاصية الاضافة (بل معكوسها) مع ملاحظة أن المساحة يجب أن تكون دائماً موجبة. ولذا نحول التكامل السالب الى موجب بوضع القيمة المطلقة كما في المثال:

مثال:

احسب مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الاقتران ق (س) = س − ٢

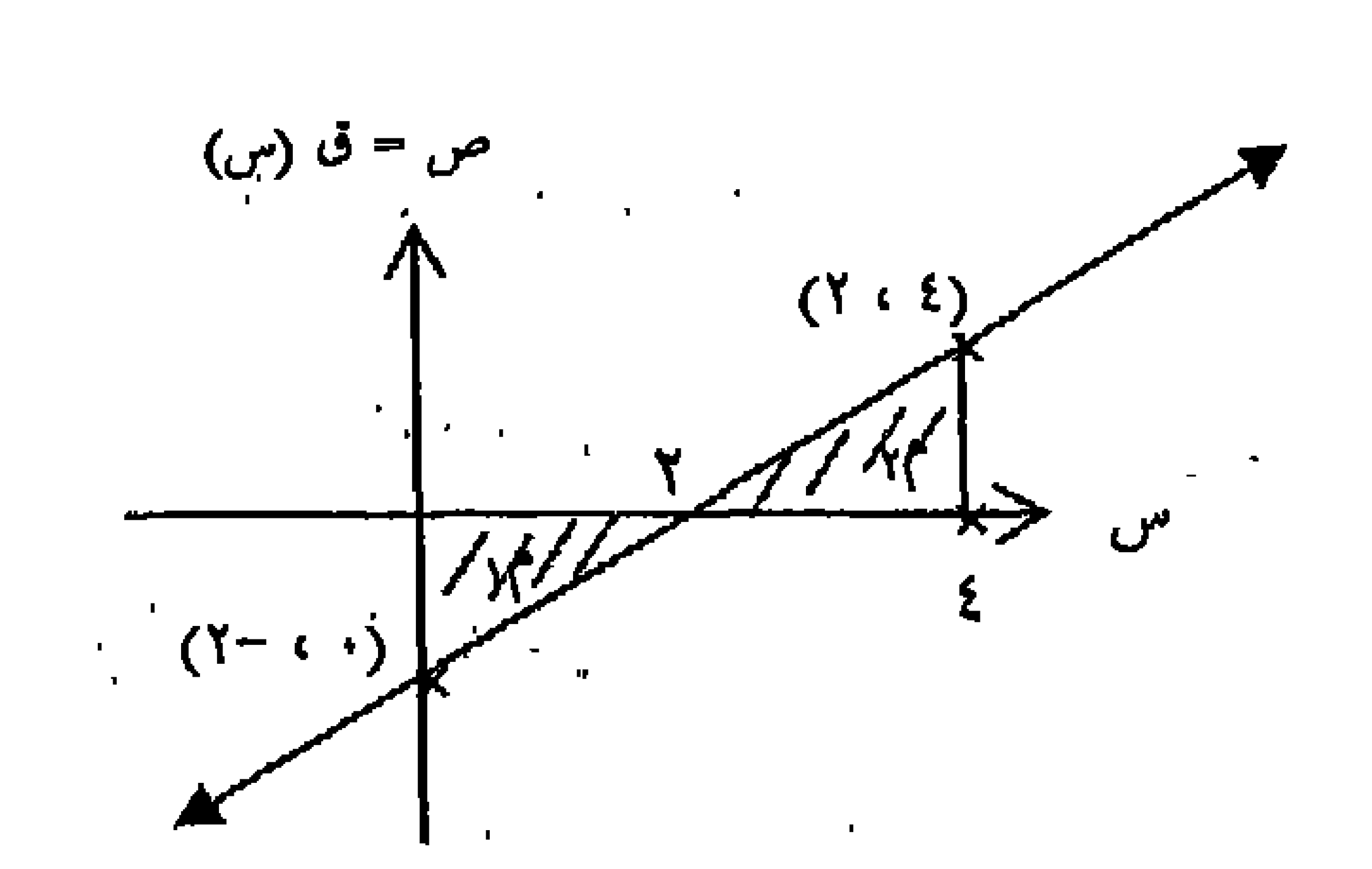
ومحور السينات خلال الفترة [٠ ، ٤].

الحل:

نصفر الاقتران س − ٢ = صفر ⟵ س = ٢ نقطة التقاطع مع محور السينات.

ونرسم الاقتران الخفي:

س	٠	٤
ق (س)	−٢	٢



هناك مساحتان

وبما أن $م = م_١ + م_٢$

فإن $م = \int_{٠}^{٢} |(س - ٢)|\, د\, س + \int_{٢}^{٤} |(س - ٢)|\, د\, س$ (مع ملاحظة أن القيمة المطلقة لكل مساحة على حدة وليست للمساحتين معاً)

$$= \left[\frac{س^٢}{٢} - ٢\,س\right]_{٠}^{٢} + \left[\frac{س^٢}{٢} - ٢\,س\right]_{٢}^{٤}$$

$= -٢ + ٢ = ٢ + ٢ = ٤$ وحدات مساحة.

(ii) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ص = ق (س) ومحور الصادات

$م = \int_{أ}^{ب} |ق(ص)|\, د\, ص$

أي نجعل س موضوع القانون هكذا:

مثال:

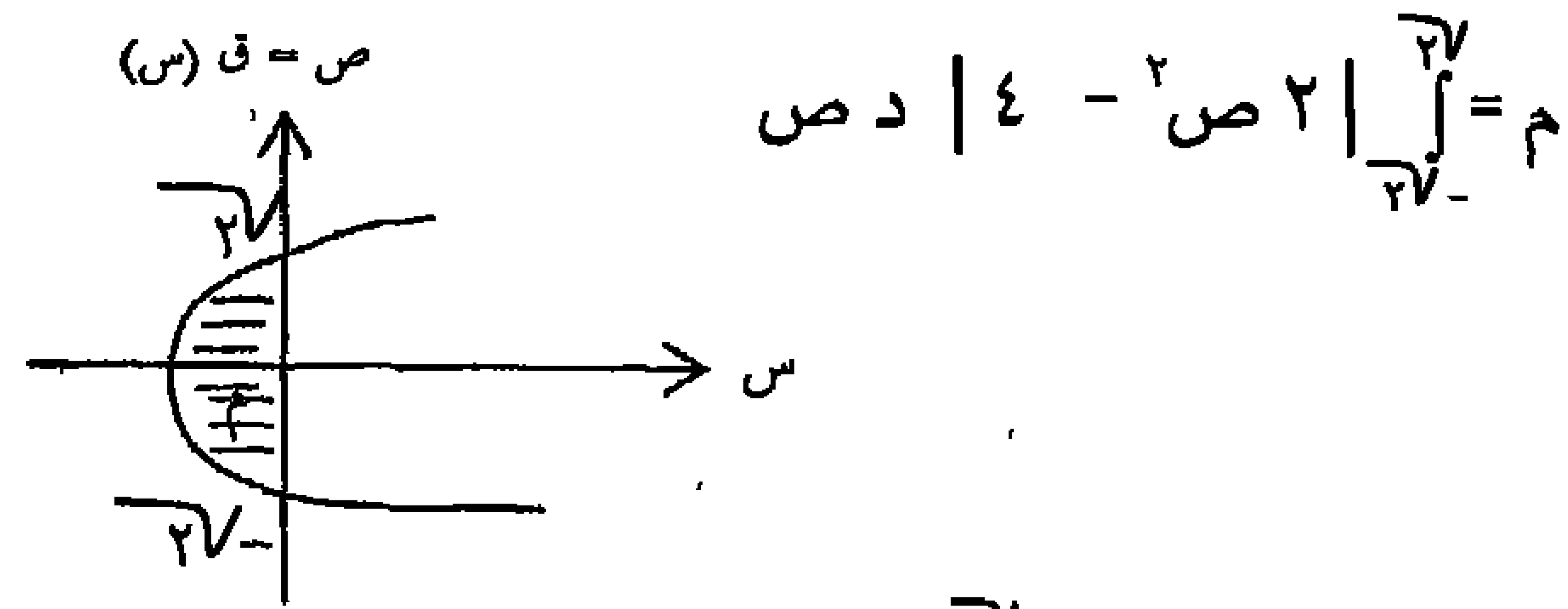
أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $س = ٢ص^٣ - ٤$ ومحور الصادات.

نجد حدود التكامل ← نصفر الاقتران هكذا:

$٢ص^٢ - ٤ = صفر$ ← $ص^٢ - ٢ = صفر$ ، $(ص + \sqrt{٢})(ص - \sqrt{٢}) = صفر$

∴ حدود التكامل $[-\sqrt{٢} ، \sqrt{٢}]$ والشكل قطع ناقص كما يلي:

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} |٢ص^٢ - ٤| \, د ص$



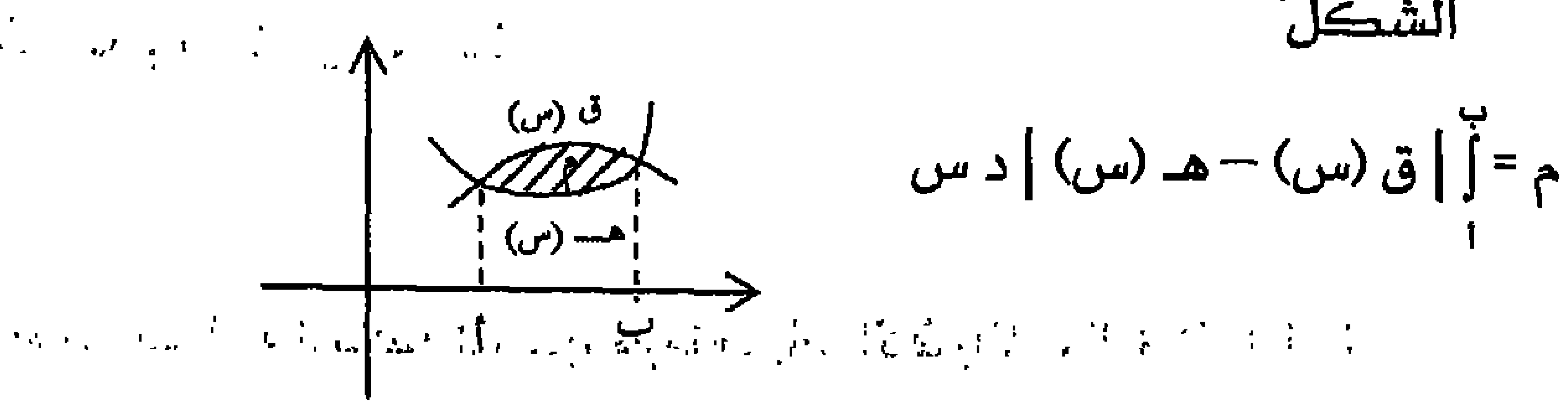
$= \left[\frac{٢ص^٣}{٣} - ٤ص\right]_{-\sqrt{٢}}^{\sqrt{٢}} = \left(\frac{٢(\sqrt{٢})^٣}{٣} - ٤(\sqrt{٢})\right) - \left(\frac{٢(-\sqrt{٢})^٣}{٣} - ٤(-\sqrt{٢})\right)$

$= \frac{١٦\sqrt{٢}}{٣} - ٤\sqrt{٢} + \frac{١٦\sqrt{٢}}{٣} - ٤\sqrt{٢}$

$= \frac{٣٢\sqrt{٢}}{٣} - \frac{٨\sqrt{٢}}{٣} = \frac{٣٢\sqrt{٢} - ٢٤\sqrt{٢}}{٣} = \frac{٨\sqrt{٢}}{٣}$ وحدة مساحة

(iii) المسافة بين منحنى اقترانين ق (س) ، هـ (س) في الفترة [أ ، ب] كما في الشكل"

$م = \int_{أ}^{ب} |ق(س) - هـ(س)| \, د س$



مثال:

احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين:

$ق(س) = ٨ - س^٢$ ، $هـ(س) = س^٢$

الحل:

لنجد حدود التكامل نحلهما معاً هكذا:

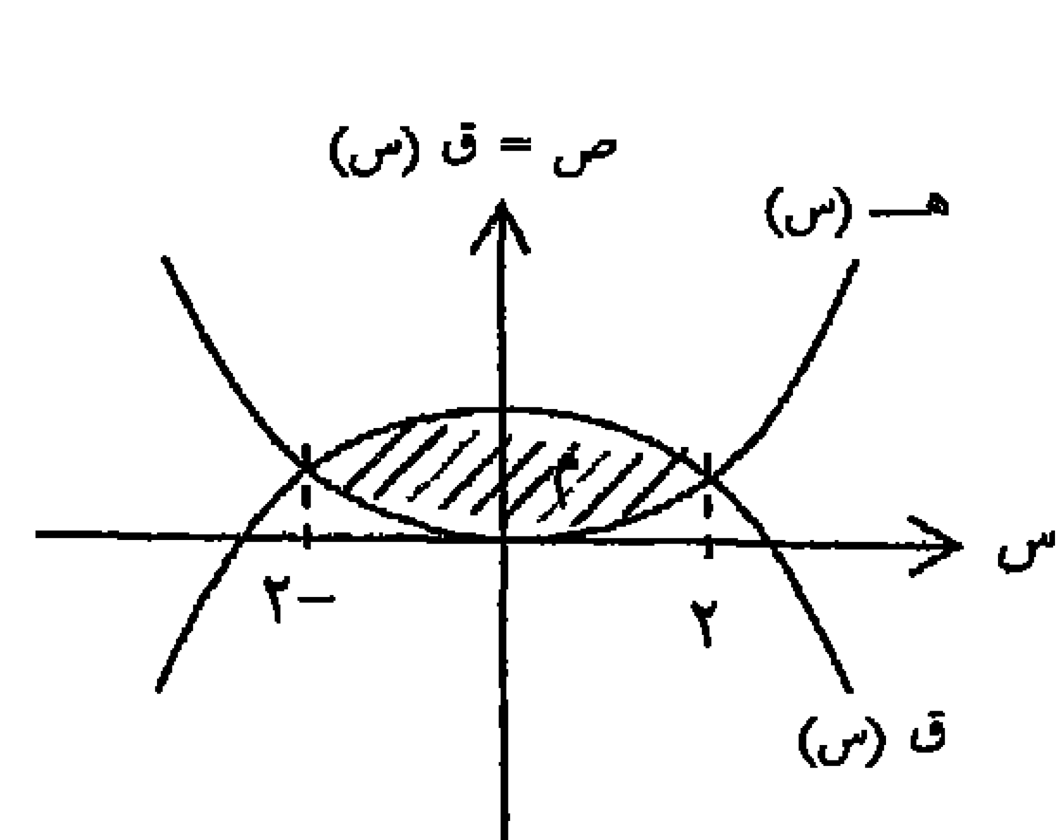
ق (س) = هـ (س)

$٨ - س^٢ = س^٢$

∴ $٨ - ٢ س^٢ =$ صفر ⟵ $٤ - س^٢ =$ صفر ⟵ (٢ + س) (٢ − س) = صفر

∴ س = − ٢ ، ٢ حدود التكامل

$م = \int_{-٢}^{٢} |ق (س) - هـ (س)|$ د س



$= \int_{-٢}^{٢} (٨ - س^٢ - س^٢)$ د س

$= \int_{-٢}^{٢} (٨ - ٢ س^٢)$ د س

$= ٨ س - \frac{٢ س^٣}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة.

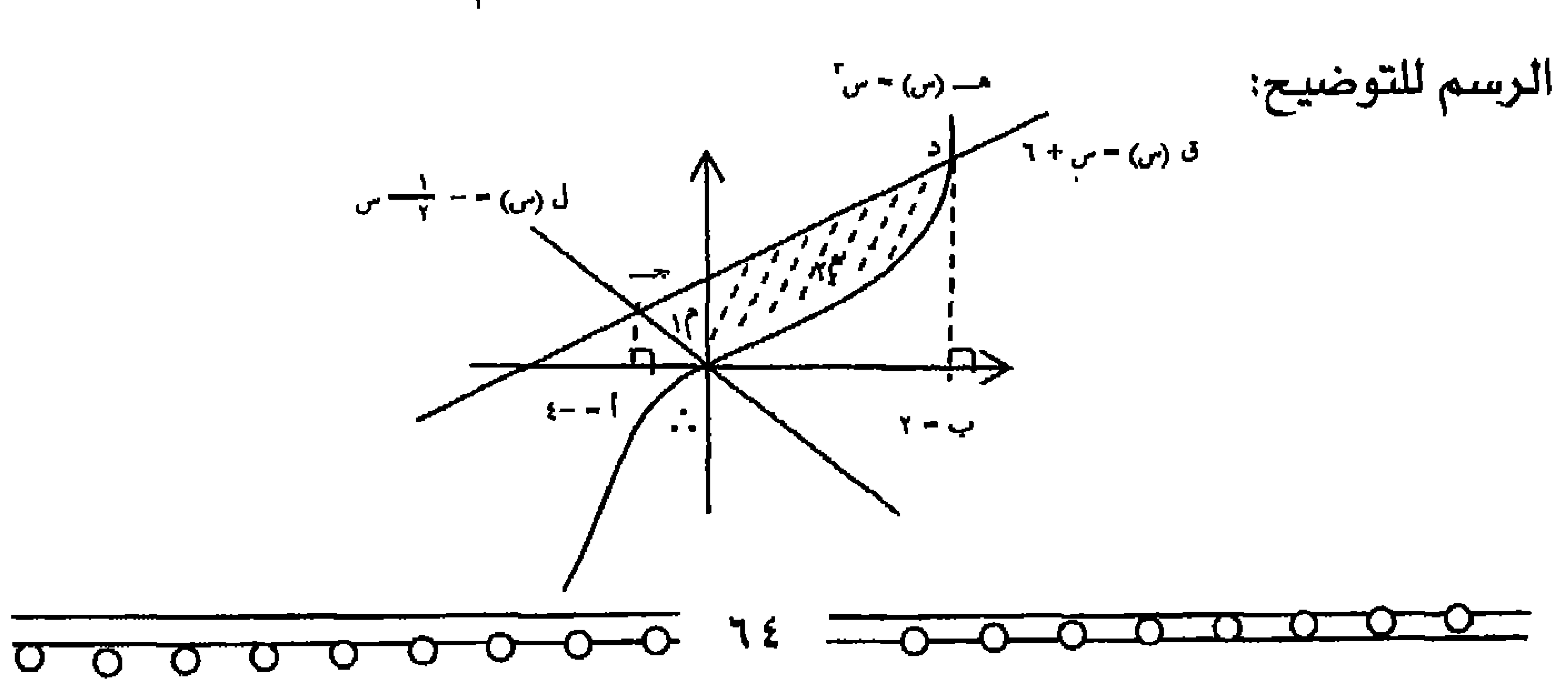
(iv) مساحة المنطقة المحصورة بين أكثر من اقترانين، هنا بالذات تقسم المنطقة الى مناطق بحيث يحدد كل منها باقترانين فقط، والرسم يوضح ويساعد على عملية التقسيم هكذا.

مثال:

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنيات الاقترانات الثلاثة التالية:

ق (س) = س + ٦ ، هـ (س) = $س^٣$ ، ل (س) = $-\frac{١}{٢}$ س

الرسم للتوضيح:



نجد الاحداثي السيني للنقطة جـ:

$$-\frac{١}{٢}\,\text{س} = \text{س} + ٦$$

ومنها س = - ٤ ⟵ أ

ونجد الاحداثي السيني للنقطة د:

$$\text{س}^{٢} = \text{س} + ٦$$

$\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦ = \text{صفر}$ وبواسطة نظرية الباقي

$$\text{س} = ٢$$

بما أن $\text{م} = \text{م}_{١} + \text{م}_{٢}$ فإن:

$$\text{م}_{١} = \int_{-٤}^{٠} \left| (\text{س} + ٦ + \frac{١}{٢}\,\text{س}) \right| \text{د س} = \int_{-٤}^{٠} \left| \frac{١}{٢}\,\text{س} + ٦ \right| \text{د س}$$

$$= \left[\frac{٣\,\text{س}^{٢}}{٤} + ٦\,\text{س} \right]_{-٤}^{٠} = ١٢ \text{ وحدة مساحة}$$

$$\text{م}_{٢} = \int_{٠}^{٢} \left| (\text{س} + ٦ - \text{س}^{٣}) \right| \text{د س} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\,\text{س} - \frac{\text{س}^{٤}}{٤} \right]_{٠}^{٢}$$

$$= ١٠ \text{ وحدات مساحة}$$

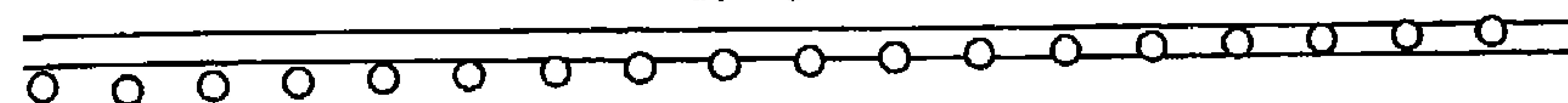
$\therefore$ م = ١٢ + ١٠ = ٢٢ وحدة مساحة.

والآن لو سألنا هذا السؤال:

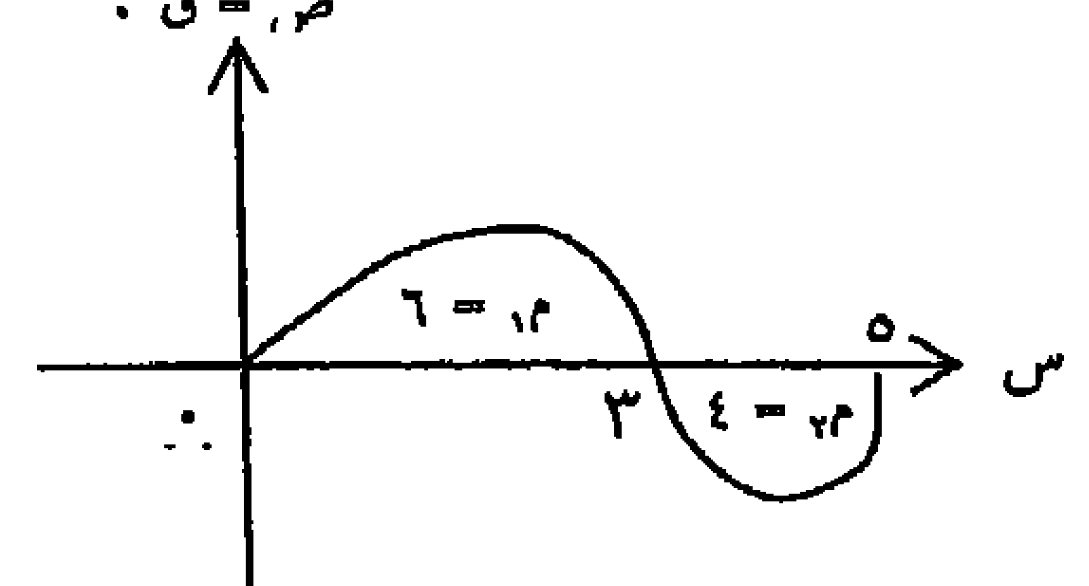
ما الفرق بين التكامل والمساحة علماً بأن المساحة تعتبر كتطبيق على التكامل؟

الفرق يكمن فيما يلي:

التكامل كمية متجهة يرتبط بالاشارة فهناك تكامل سالب وآخر موجب. أما المساحة فكمية غير متجهة لا ترتبط بالاشارة، فالمساحات جميعها موجبة، وإن



وقعت المناطق المراد ايجاد مساحاتها تحت محور السينات كوننا نستخدم القيمة المطلقة في المساحات فقط.



والتفسير كما في المثال:

اعتمد على الشكل المجاور

الذي يمثل منحنى ق (س) وإذا كانت $م_{١}$ = ٦ ، $م_{٢}$ = ٤

للاجابة عما يلي:

(i) أوجد $\int_{٠}^{٥}$ ق (س) د س

الحل:

$\int_{٠}^{٥}$ ق (س) د س = $\int_{٠}^{٣}$ ق (س) د س + $\int_{٣}^{٥}$ ق (س) د س (خاصية الاضافة)

= (+ ٦) كونها فوق محور السينات + (− ٤) كونها تحت محور السينات

= ٦ − ٤ = ٢ كعدد حقيقي بلا تمييز

(ii) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى ق (س) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٥]

م = $\int_{٠}^{٥}$ | ق (س) | د س = $\int_{٠}^{٣}$ | ق (س) | د س + $\int_{٣}^{٥}$ | ق (س) | د س

= | ٦ | + | − ٤ | = ٦ + ٤ = ١٠ وحدات مربعة

"وكما تلاحظ: الفرق بيّن والجواب في كل منهما مختلف".

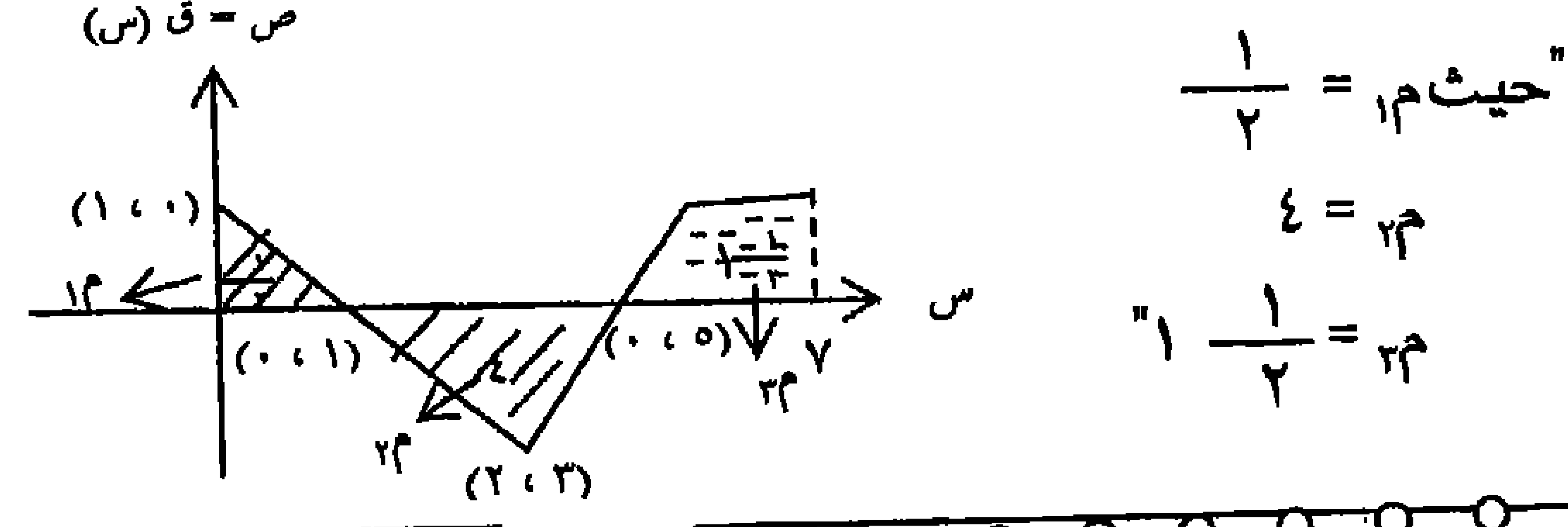
ملحوظة:

اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

"حيث $م_{١}$ = $\frac{١}{٢}$

$م_{٢}$ = ٤

$م_{٣}$ = ١ $\frac{١}{٢}$"



كما في الشكل:

في ايجاد: (i) $\int_{\cdot}^{٧} |\text{ق (س)}|\ \text{د س}$ كمساحة

(ii) $\left|\int_{\cdot}^{٧} \text{ق (س)}\ \text{د س}\right|$ كمساحة أيضاً.

أولاً: $\int_{\cdot}^{٧} |\text{ق (س)}|\ \text{د س} = \int_{\cdot}^{١} |\text{ق (س)}|\ \text{د س} + \int_{١}^{٥} |\text{ق (س)}|\ \text{د س} + \int_{٥}^{٧} |\text{ق (س)}|\ \text{د س}$

$= \left|\frac{١}{٢}\right| + |-٤| + \left|١\frac{١}{٢}\right| = \frac{١}{٢} + ٤ + ١\frac{١}{٢} = ٦$ وحدة مساحة

مساحة جميع المناطق في السؤال

أما $\left|\int_{\cdot}^{٧} \text{ق (س)}\right| \text{د س} = \left|\int_{\cdot}^{١} \text{ق (س) د س} + \int_{١}^{٥} \text{ق (س) د س} + \int_{٥}^{٧} \text{ق (س) د س}\right|$

$= \left|\frac{١}{٢} - ٤ + ١\frac{١}{٢}\right| = |-٢| = ٢$ هذا العدد لا يمثل مساحة جميع المناطق في السؤال.

لذا يجب وضع | | خطي القيمة المطلقة حول ق (س) نفسه هكذا:

| ق (س) | وليس حول $\int$ ق (س) د س هكذا | $\int$ ق (س) د س | لذا وجب التنويه.

ثانياً التطبيقات الاقتصادية للتكامل:

سنناقش كيفية استخدام التكامل المحدود في حل بعض المسائل الاقتصادية التي تساعد الاداريين في المصانع والشركات على اتخاذ القرارات الصائبة لتحقيق أهداف أصحاب هذه المنشآت ألا وهي حصد الأرباح وبحدها الأقصى، ولنبدأ بالايراد:

والايراد اثنان هما:

الايراد الكلي: (د (س)) وهو مجموع ما تحصل عليه الشركة من جراء بيع س وحدة من منتجاتها بسعر ع وحدة نقدية.

ويُحدد الاقتران د (س) = س × ع

والايراد الحدي: (دَ (س)) وهو معدل التغير في الايراد بالنسبة لعدد الوحدات المباعة (س وحدة).

أو الايراد بالنسبة للوحدة المباعة في اللحظة التي يبيع منها س وحدة من المنتج ويحدد بالاقتران دَ (س)، لذا فاقتران الايراد الحدي دَ (س) هو المشتقة الأولى لاقتران الايراد الكلي د (س).

من هذه العلاقة ولأن عملية التكامل عكس عملية التفاضل كما أسلفنا، فإذا علم اقتران الايراد الحدي دَ (س) فإننا بواسطة التكامل نستطيع أن نجد اقتران الايراد الكلي هكذا: د(س) = ∫ دَ (س) د س.

مثال:

اذا كان اقتران الايراد الحدي لِ س من الوحدات التي ينتجها مصنع هو:

دَ (س) = ٣ س^{٢} – ٢ س + ٥

أوجد: اقتران الايراد الكلي الناتج عن بيع جميع الوحدات.

الحل:

بما أن د (س) = ∫ (٣ س^{٢} – ٢ س + ٥) د س

$= \frac{٣ س^{٣}}{٣} - \frac{٢ س^{٢}}{٢} + ٥$ س {وأما جـ = صفر لأنه عند بيع صفر وحدة يكون الايراد الكلي د (س) = صفر}

∴ د (س) = س^{٣} – س^{٢} + ٥ س

هذا ويمكن ايجاد قيمة الايراد الكلي الناتج عن بيع عدد محدود من الوحدات ومن نفس العلاقة د (س) = ∫ دَ (س) د س باعتبار س ∋ ط$^{+}$ لأن عدد وحدات السلعة المباعة أعداد طبيعية على الأغلب مثل الثلاجات والغسالات والتلفزيونات وعلب المعلبات والتطالي والمربيات وغيرها.

مثال:

اذا كان اقتران الايراد الحدي بالنسبة لبيع ثلاجات هو:

$د'(س) = ٣٠ س^{٢} + ٢٠ س + ٧$ فما قيمة الايراد الكلي الناتج عن بيع ٤ ثلاجات؟

الحل:

بما أن $د(س) = \int د'(س)\ د س$

فإن $د(س) = \int (٣٠ س^{٢} + ٢٠ س + ٧)\ د س$

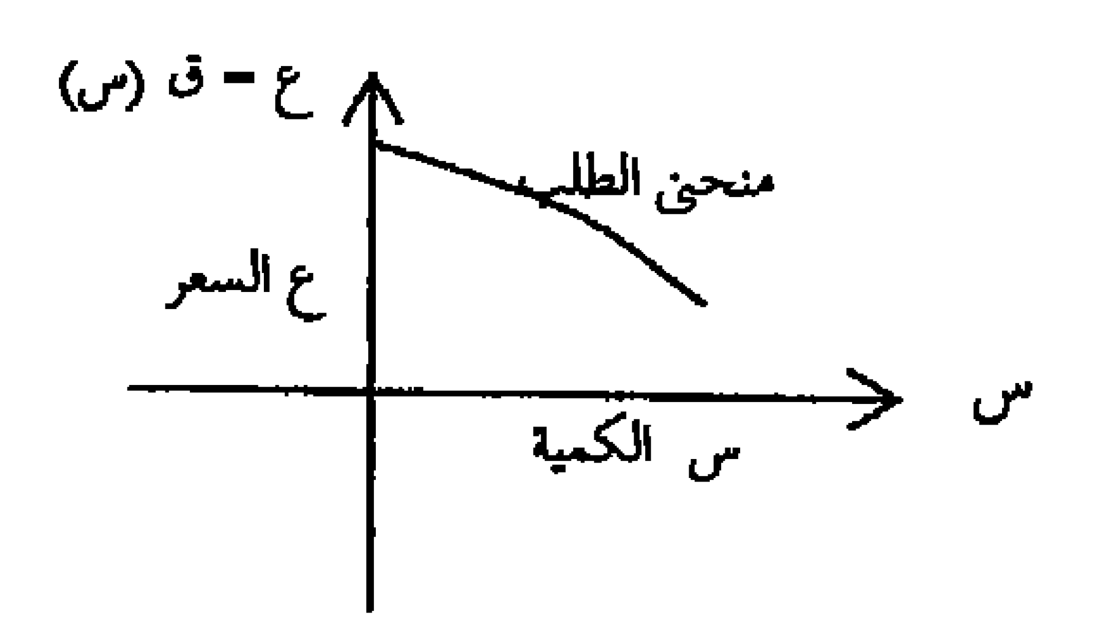
$= ١٠ س^{٣} + ١٠ س^{٢} + ٧ س$ {كون جـ = صفر كما أسلفنا}

ومنه $د(٤) = ١٠ (٤)^{٣} + ١٠ (٤)^{٢} + ٧ (٤)$

$= ٦٤٠ + ١٦٠ + ٢٨ = ٨٢٨$ دينار.

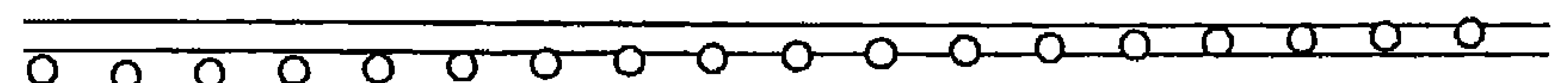
وبعد الايراد بنويعه الحدي والكلي سننتقل الى منحنيات العرض والطلب والفائض الاقتصادي المتعلق بالمستهلك من جهة والمنتج من جهة أخرى كما يلي:

لأمور اقتصادية سنعتبر محور السينات يمثل عدد وحدات السلعة المباعة س

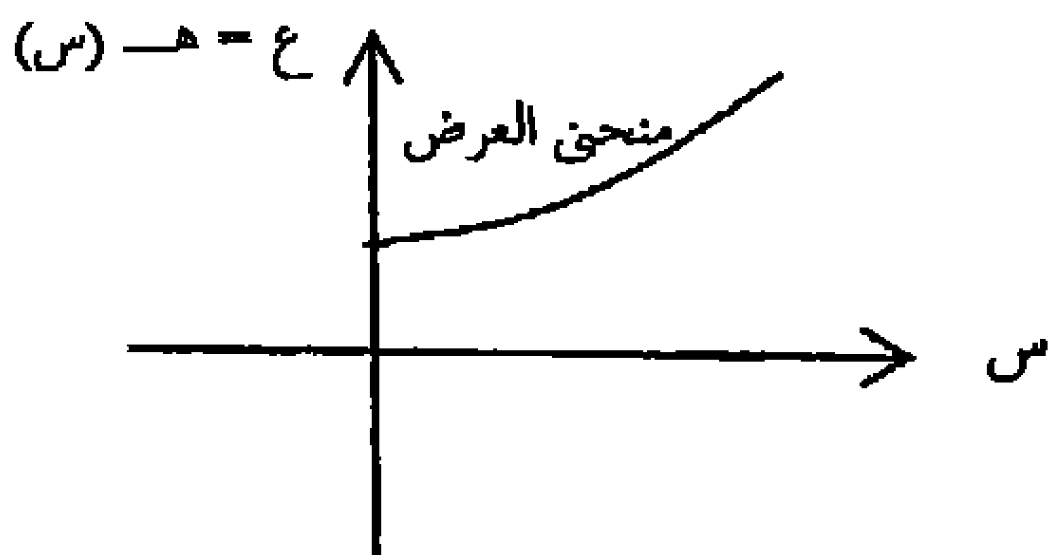


ومحور الصادات يمثل السعر ع، ومن البديهي أن الطلب على سلعة معينة يتأثر بتغير سعرها، فإذا كان الطلب عليها مرناً كالطلب على الفواكه والخضار، فكلما ازداد سعر السلعة ع قلّ الطلب عليها من قبل المستهلك، والعكس صواب.

ونعبّر عن السعر ع بالاقتران ع = ق (س) حيث س عدد وحدات السلعة المباعة ويسمى اقتران السعر – الطلب ومنحناه مُمثل كما في الشكل أعلاه، وهو اقتران متناقص فالعلاقة بين السعر والكمية علاقة عكسية، فزيادة السعر تؤدي

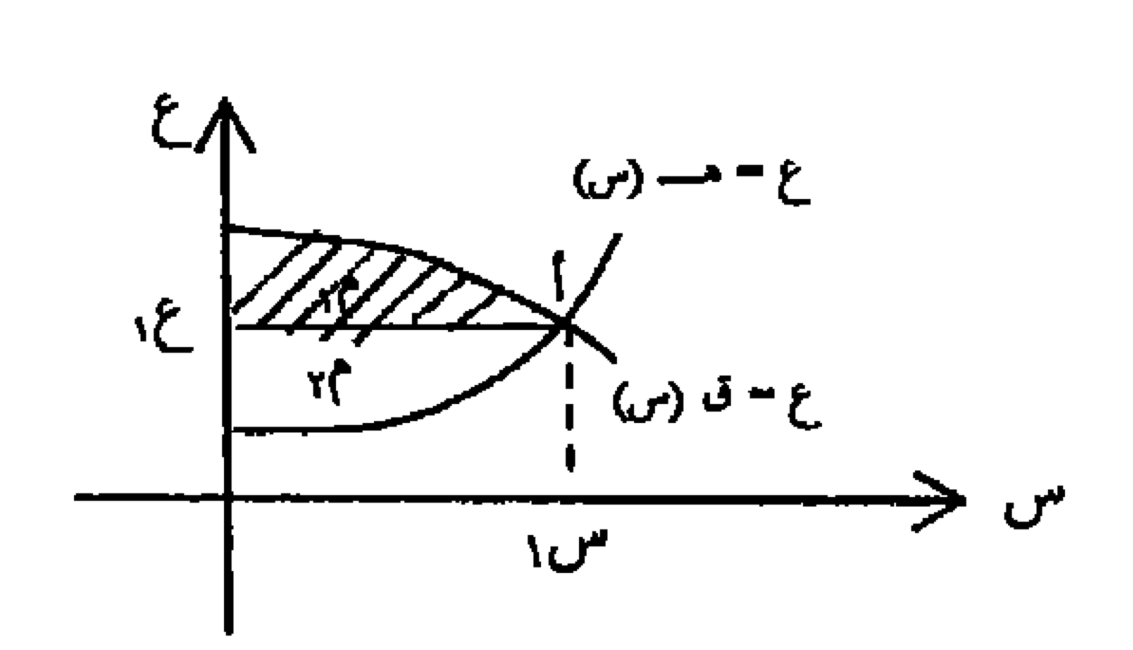


الى نقصان الطلب على السلعة، ونقصان السعر يؤدي الى زيادة الطلب عليها بالنسبة للمستهلك.



وأما بالنسبة الى المنتج وكما هو واضح في الشكل فالعلاقة بين س الوحدة المنتجة والسعر ع علاقة طردية لأن المنتج سيعرف من السلعة وحدات أكثر بزيادة السعر ليزداد ربحه، وفي هذه الحالة يكون السعر اقتراناً أي ع = ق (س) ويسمى اقتران السعر –العرض ومنحناه ممثل بالشكل وهو متزايد لأن العلاقة بين الكمية س والسعر ع بالنسبة للمنتج طردية، فعندما يلاحظ المنتج زيادة السعر فإنه يعرض كمية أكبر للبيع.

وباختصار شديد هناك منحنيان اقتصاديان مهمان في هذا السياق، وعند جمعهما معاً كما في الشكل، وهذا يتم عند التوازن. فإذا تقاطع المنحنيان في النقطة أ ($س_1$ ، $ع_1$) نقطة التوازن فإن



$س_1$ ← كمية التوازن

$ع_1$ ← سعر التوازن

فالسعر ع الذي عنده ق ($س_1$) = هـ ($س_1$) يسمى سعر التوازن

والكمية $س_1$ التي عندها ق ($س_1$) = هـ ($س_1$) تسمى كمية التوازن

فإذا ثبت السعر عند ع. فإنك تلاحظ من الشكل:

(i) لأي كمية $س < س_1$ يرغب المستهلك في شرائها فإن التوفير في السعر هو ق(س) = $ع_1$

وتمثل المساحة المظللة $م_{١}$ في الشكل ويُعرّف هذا التوفير الكلي بفائض المستهلك Consumer Surplus ويرمز له بالرمز فاك والمساحة تحسب بالتكامل هكذا:

قائض المستهلك:

$$ف ك = \int_{٠}^{س_{١}} (ق(س) - ع_{١})\, د س$$

$$\therefore ف ك = \int_{٠}^{س_{١}} ق(س)\, د س - ع_{١} س_{١} \longleftarrow$$ تعريف فائض المستهلك

مثال:

اذا كان ع = ق (س) = ٤٠ - ٦ س اقتران السعر – الطلب حيث ع السعر بالدينار

س عدد القطع المنتجة وان السعر الثابت عند $ع_{١} = ٤$

أوجد فائض المستهلك:

بما أن $ف ك = \int_{٠}^{س_{١}} ق(س)\, د س - ع_{١} س_{١}$

والآن نجد $س_{١}$ من ع = ٤٠ - ٦ س ، $ع_{١} = ٤٠ - ٦ س_{١}$

$\therefore ٤ = ٤٠ - ٦ س_{١} \longleftarrow س_{١} = ٦$ وحدات كمية التوازن

ومنه $ف ك = \int_{٠}^{٦} (٤٠ - ٦ س)\, د س - ٢٤$

$$= \left[٤٠ س - ٣ س^{٢}\right]_{٠}^{٦} - ٢٤$$

$$= ٤٠ (٦) - ٣ (٦)^{٢} - صفر - ٢٤$$

$$= ٢٤٠ - ١٠٨ - ٢٤$$

$= ٢٤٠ - ١٣٢ = ١٠٨$ دنانير فائض المستهلك.

(ii) لأي كمية س $<$ س$_1$ ببيعها المنتج يكون المكسب في السعر هو ع$_1$ – هـ(س) وتمثل المساحة م$_2$ في الشكل السابق ويعرّف هذا المكسب بفائض المنتج ويرمز له بالرمز ف$_ج$

وبواسطة التكامل:

$$ف_ج = \int_{0}^{س_1} (ع_1 - هـ(س))\, د س = ع_1 س_1 - \int_{0}^{س_1} هـ(س)\, د س$$

مثال:

اذا كان اقتران السعر –العرض هو ع = هـ (س) = ١٥ + ٣ س وأن السعر الثابت عند ع$_1$ = ٤٥ أوجد فائض المنتج.

$$ف_ج = ع_1 س_1 - \int_{0}^{س_1} هـ(س)\, د س$$

والآن نجد س$_1$ من ع = ١٥ + ٣ س

$\therefore$ ع$_1$ = ١٥+ ٣ س$_1$

$\therefore$ ٤٥ = ١٥ + ٣ س$_1$

ومنه س$_1$ = ١٠ عدد الوحدات

$$\therefore ف_ج = (٤٥)(١٠) - \int_{0}^{١} (١٥ + ٣ ٢)\, د س = ٤٥٠ - \left[(١٥ س + \frac{٣ س^٢}{٢})\right]_{0}^{١}$$

$$= ٤٥٠ - (١٥ \times ١٠ + \frac{٣}{٢} \times ١٠٠) = ٤٥٠ - (١٥٠ + ١٥٠)$$

$$= ٤٥٠ - ٣٠٠ = ١٥٠$$ دينار فائض المنتج

وعند التوازن فإن سعر التوازن يتحقق عندما:

ق (س$_1$) = هـ (س$_1$) علاقة اقتصادية هامة.

مثال:

اذا كان ع = ق (س) = ٥٠ − ٤ س هو اقتران السعر الطلب

وكان ع = هـ (س) = ٢٠ + ٢ س هو اقتران السعر العرض

أوجد سعر التوازن وكميته وفائض المستهلك وفائض المنتج.

الحل:

عند التوازن:

ق ($س_١$) = هـ ($س_١$) ⟵ ٥٠ − ٤٠ $س_١$ = ٢٠ + ٢ $س_١$ هذه معادلة

∴ $س_١$ = ٥ وحدات كمية التوازن

$ع_١$ = ٥٠ − ٤ (٥) = ٣٠

أو $ع_١$ = ٢٠ + ٢ (٥) = ٣٠

بالحالتين نفس سعر التوازن

ف ك = $\int_{٠}^{٥}$ (٥٠ − ٤ س) د س − (٣٠) (٥)

= $[$ ٥٠ س − ٢ $س^٢$ $]_{٠}^{٥}$ − ١٥٠ = ٥٠ (٥٠) − ٢ $(٥)^٢$ − ١٥٠

= ٢٥٠ − ٥٠ − ١٥٠ = ٥٠ دينار

ف ج = (٣٠) (٥) − $\int_{٠}^{٥}$ (٢٠ + ٢ س) د س

= ١٥٠ − [٢٠ س + $س^٢$ $]_{٠}^{٥}$ = ١٥٠ − ١٢٥ − صفر

= ٢٥ دينار

مثال:

اذا كان اقتران الايراد الحدي لمبيعات سيارات من نوع BMW هو:

قَ (ن) = ٣٠٠ $ن^٢$ + ٢٠ ن + ٢ حيث ن الزمن بالسنوات

أوجد قيمة الايراد الكلي المتوقع خلال ٤ سنوات.

$$ق(ن) = \int_{٠}^{٤} (٣٠٠ ن^{٢} + ٢٠ ن + ٢)\ د ن$$

الايراد الكلي

$$= \left[\frac{٣٠٠}{٣} ن^{٣} + \frac{٢٠}{٢} ن^{٢} + ٢ ن \right]_{٠}^{٤}$$

$$= ١٠٠ (٤)^{٣} + ١٠ (٤)^{٢} + ٢ (٤)$$

$$= ٦٤٠٠ + ١٦٠ + ٨ = ٦٥٦٨$$ دينار

ثالثاً:

التطبيقات العلمية للتكامل:

للاقترانات الأسية واللوغارتمية الطبيعية العديد من التطبيقات العلمية لكثير من الظواهر المتعلقة باقترانات الزمن ن وعلى الصورة ص = $ع_{(ن)}$ والمتجسدة بقوانين النمو والاضمحلال Growth and Decay .

فالنمو والتكاثر يكون بنتيجة التزايد وأما الاضمحلال والتلاشي يكون بنتيجة التناقص. وبالاستعانة بالتكامل يمكن استنتاج هذا القانون البالغ الأهمية في شتى المجالات العلمية:

ص = $ع_{(ن)} = ع_{(٠)} \times هـ^{أ ن}$ حيث:

$ع_{٠}$ = القيمة الابتدائية للقانون $ع_{(ن)}$

$ع_{ن}$ = القيمة المراد ايجادها من القانون

هـ = ٢,٧٢ العدد النابييري نسبة الى العالم البريطاني نابيير (١٥٥٠ – ١٦٠٧) الذي كان أول من أوجده واستخدمه.

ن = الزمن

أ = عدد ثابت يسمى معامل التزايد أو التناقص.

فإذا كان أ > صفر فإن قيمة ع $_{(ن)}$ تزداد بمرور الزمن، وعندها تعبر المعادلة ص = ع $_{(ن)}$ عن النمو مثل زيادة عدد السكان في البلدان وكما هو واضح في هذا المثال:

مثال:

اذا بلغ عدد سكان احدى الدول ٥٠٠٠٠٠٠ نسمة عام ٢٠٠٤ م، وكان معدل النمو في تلك الدولة يتبع العلاقة ص = ع $_{(ن)}$ = ٥٠٠٠٠٠٠ × هـ $^{٠٫٠٢٧ ن}$ ، حيث ن تُعبر عن عدد السنوات اعتباراً من عام ٢٠٠٤ م. ما عدد سكان تلك الدولة عام ٢٠٠٥ م؟

المدة = ٢٠٠٥ – ٢٠٠٤ = ١ سنة

أي أن:

ع $_{(١)}$ = ٥٠٠٠٠٠٠ × ٠٫٠٢٧ × ١ = ٥٠٠٠٠٠٠ × هـ $^{٠٫٠٢٧}$

لكن هـ = ٢٫٧٢ العدد النايبيري

عدد السكان عام ٢٠٠٥ م = ٥٠٠٠٠٠٠ × (٢٫٧٢)$^{٠٫٠٢٧}$

وباستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب فإن (٢٫٧٢)$^{٠٫٠٢٧}$ = ١٫٠٢٧٣٤٨

عدد السكان عام ٢٠٠٥ م = ٥٠٠٠٠٠٠ (١٫٠٢٧٣٤٨)

= ٥١٣٦٧٤٠ نسمة

وإذا كان أ < صفر فإن قيمة ع (ن) تتناقص بمرور الزمن، وعندها تعبر المعادلة ص = ع (ن) عن الاضمحلال أو التلاشي، ويسمى أ معامل الاضمحلال مثل انحلال المواد المشعة كما هو واضح في المثال:

مثال:

تتحلل مادة مشعة بشكل منتظم بمرور الزمن، ويخضع تحللها لقانون الاضمحلال أو التلاشي، فإذا كان معدل التناقص لهذه المادة يبلغ ٠,٠٠٢ سنويا،.

فجد الكمية المتبقية من المادة بعد مرور ٣٠٠٠ سنة، علماً بأن كتلة المادة الأصلية تبلغ ٥٠ غراماً.

باستخدام القانون ص = ع (ن) = ع ٠ × هـ ^أن^ حيث:

ع (ن) المادة المنبعثة بعد ن سنة

ع (٠) المادة الأصلية أو القيمة الابتدائية = ٥٠ غراماً

هـ العدد النابيري = ٢,٧٢

ن الزمن بالسنوات = ٣٠٠٠ سنة

أ ثابت (معامل التناقص أو الاضمحلال) = - ٠,٠٠٠٢ كونه تناقص اضمحلال أو تلاشي

∴ ع (٣٠٠٠) = ٥٠ × (٢,٧٢)^-٠,٠٠٢ × ٣٠٠٠^

= ٥٠ × (٢,٧٢)^-٦٠٠٠^ = ٥٠ × $\frac{١}{٢,٧٢}$

$= \frac{٥٠}{٦(٢,٧٢)}$ باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب.

= ٠,١٢٩ غراماً المادة المتبقية

هذا ويمكن استخدام قانون النمو والاضمحلال في ايجاد الفائدة المركبة عند استثمار مبلغاً من المال في أحد البنوك، وعندما تضاف الفائدة الى المبلغ في كل لحظة وباستمرار وكأننا نحسب الفائدة المركبة بشكل لحظي (في أي لحظة نشاء) كما في المثال:

مثال:

أودع شخص ٥٠٠ دينار في بنك، بمعدل فائدة مركبة ٧,٥٪ سنوياً، فإذا كان البنك يحسب الفائدة المركبة باستمرار ويضيفها الى المبلغ في كل لحظة، ما هي جملة المبلغ بعد ٤٠ سنة، ثم احسب فوائده المركبة.

باستخدام القانون:

ص = $ع_{(ن)} = ع_{٠} \times هـ^{أن}$ حيث

$ع_{(ن)}$ = الجملة بعد ٤٠ سنة

$ع_{٠}$ = المبلغ المودع = ٥٠٠ دينار

أ = ٧,٥٪ = ٠,٠٧٥ القيمة تزداد، نمو

ن = ٤٠ سنة

∴ $جـ_{(٤٠)} = ٥٠٠ \times (٢,٧٢)^{٠,٠٧٥ \times ٤٠}$

$= ٥٠٠ \times (٢,٧٢)^{٣}$

باستخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب

فإن: ج$_{(٤٠)}$ = ٥٠٠ × ٢٠,٠٨٥٥

= ١٠٠٤,٢٧٥ دينار

الفائدة المركبة = الجملة المركبة – الأصل (المبلغ المودع)

= ١٠٠٤,٢٧٥ – ٥٠٠ = ٥٠٤,٢٧٥ دينار

من الملاحظ أن الفائدة المركبة أكبر من الأصل، وهذا غالباً ما يحدث بازدياد الزمن.

(٢٢- ٦) أمثلة محلولة على التكامل وتطبيقاته

مثال (١) :

اذا كان $\int$ ق (س) د س = س + س^{٢} + س^{٣} أوجد ق (١) ، قَ (١)

الحل:

حتى نتخلص من التكامل فإننا نشتق الطرفين هكذا:

$\frac{د}{د س} \int$ ق (س) د س = $\frac{د}{د س}$ (س + س^{٢} + س^{٣}) = ق (س) {مفهوم التكامل وعلاقته بالتفاضل}

∴ ق (س) = (س + س^{٢} + س^{٣})َ

= ١ + ٢ س + ٣ س^{٢}

∴ ق (١) = ١ + ٢ (١) + ٣ (١)^{٢} = ١ + ٢ + ٣ = ٦

ومنها قَ (س) = ٢ + ٦ س

∴ قَ (١) = ٢ + ٦ (١) = ٨

مثال (٢):

ما اشارة التكامل $\int_{-٢}^{-١} \frac{س}{س^{٤} + ٣}$ د س أسالبة أم موجبة ؟

بما أن اشارة التكامل $\int_{-٢}^{-١} \frac{س}{س^{٤} + ٣}$ د س هي نفس اشارة الاقتران

في الفترة [- ٣ ، - ١] فإننا نجد اشارة الاشارة هكذا:

اشارة البسط: سالبة — — — — — — — (من -٣ إلى -١)

اشارة المقام: موجبة + + + + + + (من -٣ إلى -١)

كون س^{٤} موجب و ٣ موجب

∴ اشارة الاقتران $\frac{س}{س^{٤} + ٣}$ سالبة

∴ اشارة التكامل $\int_{-٢}^{-١} \frac{س}{س^{٤} + ٣}$ د س سالبة أيضاً.

مثال (٣):

أجرِ التكاملات التالية:

(i) $\int (س^{٣} - س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}})$ د س

الحل:

بعد التبسيط بالقانون هكذا:

$\int (س^{٣} - س^{٢} + س^{-٢} - س^{-٣})$ د س

$= \frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{-١}}{-١} - \frac{س^{-٢}}{-٢} +$ جـ

$= \frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{١}{٣} س^{٣} - س^{-١} + \frac{س^{-٢}}{٢} +$ جـ

$= \frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{س} + \frac{١}{٢ س^{٢}} +$ جـ

(ii) $\int_{١}^{٢} \frac{س^{٤} + ١}{س^{٢}}$ د س

الحل:

بعد التجزيء بالقانون هكذا:

$\int_{١}^{٢} (\frac{س^{٤}}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٢}})$ د س $= \int_{١}^{٢} (س^{٢} + س^{-٢})$ د س $= \left[\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{-١}}{-١}\right]_{١}^{٢}$

$= \left[\frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{س}\right]_{١}^{٢} = (\frac{١}{٣}(٢)^{٣} - \frac{١}{٢}) - (\frac{١}{٣}(١)^{٣} - \frac{١}{١}) = \frac{١٧}{٦}$

مثال (٤):

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقترانين:

ق (س) = جا س ، هـ (س) = جتا س ، حيث $٠ \leq$ س $< ٢\pi$

الحل:

لإيجاد حدود التكامل نقول:

$\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س}}$

ظا س = ١

$\therefore$ س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

وهي حدود التكامل

$\therefore$ م = $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٥\pi}{٤}}$ (جا س − جتا س) د س

= - جتا س − جا س $\Big]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٥\pi}{٤}}$

= - ١ { جتا س + جا س } $\Big]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٥\pi}{٤}}$

= - ١ { جتا ٥ $\frac{\pi}{٤}$ + جا ٥ $\frac{\pi}{٤}$ - جتا $\frac{\pi}{٤}$ - جا $\frac{\pi}{٤}$ }

= - ١ {- جتا $\frac{\pi}{٤}$ - جا $\frac{\pi}{٤}$ - - جتا $\frac{\pi}{٤}$ - جا $\frac{\pi}{٤}$ }

= - ١ {- ٢ جتا $\frac{\pi}{٤}$ - ٢ جا $\frac{\pi}{٤}$}

= ٢ جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ٢ جا $\frac{\pi}{٤}$

= ٢ ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$) + ٢ ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$) = $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ = ٢ $\sqrt{٢}$ وحدة مساحة.

مثال (٥):

أوجد $\int$ س (س - ٣)^{٥} د س التعويض

نفرض أن ص = س - ٣ ، س = ص + ٣

∴ د ص = د س

∴ $\int$ س (س - ٣)^{٥} د س = $\int$ (ص + ٣) (ص^{٥}) د ص

= $\int$ (ص^{٦} + ٣ ص^{٥}) د ص

= $\frac{١}{٧}$ ص^{٧} + $\frac{٣}{٦}$ ص^{٦} + جـ

= $\frac{١}{٧}$ (س - ٣)^{٧} + $\frac{١}{٢}$ (س - ٣)^{٦} + جـ

مثال (٦):

أوجد $\int$ قا^{٢} س هـ$^{\sqrt{\text{ظا س}}}$ د س "أولاً تعويض للتخلص من الجذر"

نفرض أن ص = $\sqrt{\text{ظا س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{(ظا س)}'}{٢\sqrt{\text{ظا س}}} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{ س}}{٢\sqrt{\text{ظا س}}}$

قا^{٢} . د س = ٢ $\sqrt{\text{ظا س}}$ د ص

د س = $\frac{٢\sqrt{\text{ظا س}}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ د ص

$\int$ قا^{٢}س هـ$^{\sqrt{\text{ظا س}}}$ د س = $\int$ قا^{٢}س × هـ$^{\text{ص}}$ × $\frac{٢\sqrt{\text{ظا س}}}{\text{قا}^{٢}\text{س}}$ د ص

= $\int$ هـ$^{\text{ص}}$ × ٢ ص د ص

= ٢ $\int$ ص هـ$^{\text{ص}}$ د ص ‎. . . . . (١) ثانياً بالأجزاء

(١) ق = ص   (٣) $\int$ د هـ = $\int$ هـ^{ص} د ص

(٢) د ق = د ص   (٤) هـ = هـ^{ص}

لكن $\int$ ق · د هـ = ق · هـ − $\int$ هـ · د ق

∴ $\int$ ص هـ^{ص} د ص = ص هـ^{ص} − $\int$ هـ^{ص} د ص

= ص هـ^{ص} − هـ^{ص} + جـ ····· (٢)

نعود الى ··· (١) هكذا:

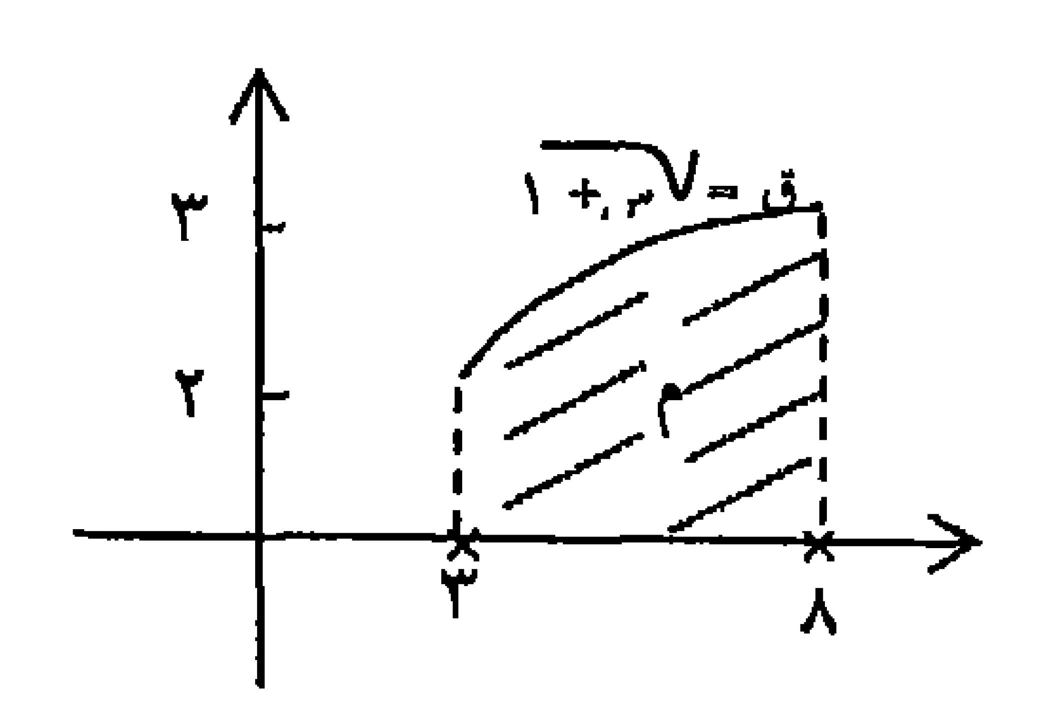
$\int$ قا^{٢}س هـ$^{\sqrt{ظاس}}$ د س = ٢ ص هـ^{ص} − ٢ هـ^{ص} + جـ   ثم نعيد قيمة ص = $\sqrt{ظا س}$

= ٢ $\sqrt{ظا س}$ هـ$^{\sqrt{ظا س}}$ − ٢ هـ$^{\sqrt{ظا س}}$ + جـ

مثال (٧):

احسب المساحة المحصورة بين منحنى ق (س) = $\sqrt{س + ١}$ ، ١ س ≤ − ١
ومحور السينات في الفترة [٣ ، ٨]

الحل:



م = $\int_{٣}^{٨}$ ($\sqrt{س + ١}$) د س

= $\int_{٣}^{٨}$ (س + ١)$^{\frac{١}{٢}}$ د س

والتكامل بالتعويض:

ص = س + ١   الحد الأعلى ٨ + ١ = ٩   الحد الأسفل ٣ + ١ = ٤

$\frac{د ص}{د س}$ = ١

د ص = د س

$$م = \int_{٣}^{٨} (س + ١)^{\frac{١}{٢}} د س = \int_{٤}^{٩} ص^{\frac{١}{٢}} د ص = \frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} \Big]_{٤}^{٩}$$

$$= \frac{٢}{٣} \sqrt{ص^{٣}} \Big]_{٤}^{٩} = \frac{٢}{٣} \{ \sqrt{٩ \times ٩ \times ٩} - \sqrt{٤ \times ٤ \times ٤} \}$$

$$= \frac{٢}{٣} \{ ٣ \times ٣ \times ٣ - ٢ \times ٢ \times ٢ \} = \frac{٢}{٣} \{ ٢٧ - ٨ \} = (\frac{٢}{٣}) (١٩) = \frac{٣٨}{٣}$$

وحدة مساحة

مع ملاحظة أنه يمكن تكامل كثير الحدود الخطي $(س + ١)^{\frac{١}{٢}}$

{مباشرة هكذا: $\int (س + ١)^{\frac{١}{٢}} د س = \frac{١}{معامل س} \times \frac{(س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$

$= ١ \times \frac{٢}{٣} \sqrt{(س + ١)^{٣}}$

مثال (٨):

أوجد $\int س هـ^{٤س^{٢}} د س$ اقتران أسي.

بما أن المعامل س يظهر في مشتقة الأس (٤ س^{٢})´ فإنه يكامل بقانون الاقتران الأسي ولكن بعد ترتيبه هكذا:

$\frac{١}{٨} \int ٨ س هـ^{٤س^{٢}} د س = \frac{١}{٨} \times هـ^{٤س^{٢}} + جـ$ { أصبح المعامل ٨ س مشتقه الأس ٤ س^{٢}}

ويمكن حل السؤال بالتعويض أيضاً.

مثال (٩):

أوجد $\int س^{٢}$ جتا س د س   الأجزاء ولأكثر من مرة

نفرض:

(١) ق = س^{٢} $\int$ د هـ = $\int$ جتا س د س

(٢) د ق = ٢ س د س   هـ = جا س

بما أن $\int$ ق · د هـ = ق · هـ - $\int$ هـ · د ق

∴ $\int$ س^{٢} جتا س د س = س^{٢} جا س - $\int$ ٢ س · جا س د س

= س^{٢} جا س - ٢ $\int$ ص جا س د س ———— (١)

وبنفس الأسلوب نجد $\int$ س جا س د س بالأجزاء مرة أخرى:

(١) ق = س $\int$ د هـ = $\int$ جا س د س

(٢) د ق = د س هـ = - جتا س

∴ $\int$ س جا س د س = - س جتا س - $\int$ - جتا س د س

= - س جتا س + $\int$ جتا س د س

= - س جتا س + جا س + جـ ...... (٢)

نعود الى (١) هكذا:

∴ $\int$ س^{٢} جتا س د س = س^{٢} جا س - ٢ $\int$ - س جتا س + جا س $\int$ + جـ

= س^{٢} جا س + ٢ س جتا س – ٢جا س + جـ

ملحوظة:

ان $\int$ س^{ن} جتا س د س أو $\int$ س^{ن} جا س د س يكامل بالأجزاء

لعدد من المرات = ن (أس س)

مثال (١٠):

أوجد $\int$ هـ^{س} جتا س د س "تكامل متكرر"

نفرض:

ق = هـ^{س} $\int$ د هـ = $\int$ جا س د س

د ق = هـ^{س} د س ——— هـ = جا س

∴ $\int$ هـ^{س} جتا س د س = ق · هـ − $\int$ هـ · د ق   بالأجزاء

= هـ^{س} جا س − $\int$ هـ^{س} جا س د س ——— (١)

وكذلك $\int$ هـ^{س} جا س د س   بالأجزاء

ق = هـ^{س} $\int$ د هـ = $\int$ جا س د س

د ق = هـ^{س} د س ——— هـ = − جتا س

∴ $\int$ هـ^{س} جا س د س = − هـ^{س} جتا س − $\int$ − هـ^{س} جتا س د ⟵ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\int$ هـ^{س} جتاس د س = هـ^{س} جاس − {− هـ^{س} جتاس + $\int$ هـ^{س} جتاس د س}

∴ $\int$ هـ^{س} جتاس د س = هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس − $\int$ هـ^{س} جتاس د س (الآن تكرر التكامل كما تلاحظ)

∴ $\int$ هـ^{س} جتاس د س + $\int$ هـ^{س} جتاس د س = هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس

∴ ٢ $\int$ هـ^{س} جتاس د س = هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس

∴ $\int$ هـ^{س} جتاس د س = $\frac{١}{٢}$ (هـ^{س} جاس + هـ^{س} جتاس) + جـ

مثال (١١):

حل المعادلة التفاضلية التالية:

(i) جا ص د ص = $\sqrt{س}$ د س

تكامل الطرفين هكذا:

$\int$ جا ص د ص = $\int \sqrt{س}$ د س = $\int$ س$^{\frac{١}{٢}}$ د س

− جتا ص = $\dfrac{(س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

$$- \text{جتا ص} = \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$$

$$\therefore \text{جتا ص} = -\frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$$

$$\text{(ii)}\quad \text{س}^{٢} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ص}^{٣}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = \frac{\text{س}^{-٢}}{\text{ص}^{-٢}}$$ وبالضرب التبادلي

$$\int \text{ص}^{-٢}\,\text{د س} = \int \text{س}^{-٢}\,\text{د س}$$

$$\frac{\text{ص}^{-٢}}{-٢} = \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{جـ}$$

$$\therefore \ -\left(\frac{١}{٢\,\text{ص}^{٢}} = \frac{-١}{\text{س}} + \text{جـ}\right)$$

$$\frac{١}{٢\,\text{ص}^{٢}} = \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$$

مثال (١٢):

يتناقص ثمن سيارة بمرور الزمن وبشكل منتظم، ويخضع هذا التناقص لقانون الاضمحلال، فإذا كان ثمنها الأصلي ١٠٠٠٠ دينار، ومعدل التناقص في ثمنها ٥٪ سنوياً، ما ثمنها بعد مرور ٢٠ عام؟

الحل:

نرتب المعطيات كما هو آت:

ع. = ١٠٠٠٠ دينار

ن = ٢٠ عام

أ = - ٠,٠٥

$$\text{ع}_{(٢٥)} = \text{ع}_{٠} \times \text{هـ}^{\text{أن}} = ١٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{-٠٫٠٥ \times ٢٠}$$

$$= ١٠٠٠٠ \times \text{هـ}^{-١٫٠٠}$$

$$= ١٠٠٠٠ \times \frac{١}{\text{هـ}} = \frac{١٠٠٠٠}{٢٫٧٢} = ٣٦٧٦ \text{ دينار}$$

مثال (١٣):

اذا كان اقتران السعر – الطلب لمنتج معين هو $\text{ع} = \text{ق}(\text{س}) = ٢٠ - \text{س}^{٢}$

واقتران السعر – العرض لهذا المنتج هو $\text{ع} = \text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢$

أوجد كمية وسعر التوازن وفائض المستهلك عند سعر التوازن.

الحل:

عند التوازن:

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})$$

$$٢٠ - \text{س}^{٢} = \text{س}^{٢} + ٢$$

$$٢٠ - ٢ = ٢\text{س}^{٢}$$

$$١٨ = ٢\text{س}^{٢}$$

$$\text{س}^{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩$$

$\text{س} = ٣$ كمية التوازن

$$\text{ع} = ٢٠ - (٣)^{٢} = ٢٠ - ٩ = ١١$$

أو $(٣)^{٢} + ٢ = ١١$

$$\text{ف ك} = \int_{٠}^{٣} \text{ق}(\text{س})\, \text{د س} - \text{ع}_{١}\text{س}_{١} = \int_{٠}^{٣} (٢٠ - \text{س}^{٢})\, \text{د س} - \text{ع}_{١}\text{س}_{١}$$

$$= \left[٢٠\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{٣} - (١١)(٣)$$

$= ٦٠ - \frac{(٣)^٢}{٣} - ٣٣ = ٦٠ - ٣٣,٩ = ٥١ - ٣٣ = ١٨$ دينار

مثال (١٤):

أوجد $\int \frac{١ + ٣س}{(١ + ٣س)(١ - س)}$ د س

نبسط هذا السؤال بالتحليل هكذا:

$$\int \frac{١ + ٣س}{١ + ٢س - ٣س^٢} \text{ د س} = \int \frac{١}{١ - س} \text{ د س}$$

$$= - \int \frac{-١}{١ - س} \text{ د س}$$ ليصبح البسط مشتقه المقام

$$= - \text{لو}_{هـ}^{(١-س)} + \text{جـ}$$

مثال (١٥):

أوجد (i) $\int$ جا^٥ س د س "تذيب القوة جزئياً كونها فردية من المتطابقة جا^{٢}س + جتا^٢ س = ١ "

هكذا:

$\int$جا^{٥}س د س = $\int$ جا س · جا^{٤}س

= $\int$ جا س · جا^{٢}س · جا^{٢}س "تفكيك الأسس"

لكن جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

$\therefore$ جا^٢ س = ١ –جتا^٢ س

$\therefore \int$ جا^{٥}س د س = $\int$ جا س (١ –جتا^{٢}س) (١- جتا^{٢}س) دس

= $\int$ جا س (١ - ٢ جتا^{٢}س + جتا^٢ س) د س الإذابة الجزئية

ثم نكمل حل السؤال بالتعويض كما يلي:

نفرض ص = جتا س

∴ د ص = - جا س د س

ومنها د س = $\frac{-١}{\text{جا س}}$ د ص

∴ $\int$ جا^{٥}س د س = $\int$ جاس (١ - ٢ ص^{٢} + ص^{٤}) × $\frac{-١}{\text{جاس}}$ د ص

= $\int$ (- ١ + ٢ ص^{٢} − ص^{٤}) د ص

= - ص + $\frac{٢}{٣}$ ص^{٣} - $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$ + جـ

= - جتا س + $\frac{٢}{٣}$ جتا^{٣} س - $\frac{١}{٥}$ جتا^{٥} س + جـ

(ii) $\int$ جتا^{٤}س د س تذيب القوة كلياً كونها زوجية من المتطابقة

جتا٢ س = جتا^{٢} س − جا^{٢}س

= ٢ جتا^{٢} س - ١

= ١ - ٢ جا^{٢} س

= $\int$ جتا^{٢}س · جتا^{٢}س د س

لكن جتا ٢ س = ٢ جتا^{٢} س - ١

٢ جتا^{٢}س = ١ + جتا ٢ س

ومنها جتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$جتا ٢ س

∴ $\int$ جتا^{٤}س د س = ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ص ٢ س) ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ص ٢ س) د س

= $\frac{١}{٤}$ + جتا ٢ س + $\frac{١}{٤}$ جتا^{٢} ٢ س

لكن

جتا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س

وعند وضع ٢ س بدلاً من س في الطرفين:

∴ جتا^{٢} ٢ س = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٤ س مفوضها فيما يلي:

∴ ∫ جتا^{٤} س د س = ∫ $\frac{١}{٤}$ + جتا ٢ س + $\frac{١}{٤}$ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ جتا ٤ س) ∫ د س

= ∫ ($\frac{١}{٤}$ + جتا ٢ س + $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٨}$ جتا ٤ س) د س

= ∫ ($\frac{٣}{٨}$ + جتا ٢ س + $\frac{٣}{٨}$ جتا ٤ س) الاذابة كلية

وبما أن ∫ جتا أ س د س = $\frac{١}{أ}$ جا أ س "و / أو بالتعويض"

∴ ∫ جتا^{٤} س د س = $\frac{٣}{٨}$ س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٨}$ × $\frac{١}{٤}$ جا ٤ س + جـ

= $\frac{٣}{٨}$ س + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٣٢}$ جا ٤ س + جـ

مثال (١٦):

أوجد ∫ قا^{٤} س د س

الحل:

∫ قا^{٤} س • د س = ∫ قا^{٢} س • قا^{٢} س د س فكك الأسس

لكن قا^{٢} س = ظا^{٢} س + ١ من جا^{٢}س + جتا^{٢} س = ١

والقسمة على جتا^{٢}س

∴ ∫ قا^{٤} س د س = ∫ قا^{٢} س (ظا^{٢} س + ١) د س

= ∫ قا^{٢}س ظا^{٢} س + قا^{٢} س د س

= ∫ قا^{٢} س ظا^{٢}س د س + ∫ قا^{٢} س د س

لكن $\int$ قا^{2}س د س = ظا س .... (١)

وأما قا^{2} س ظا^{2} س فيتم بالتعويض هكذا:

نفرض ص = ظا س

د ص = قا^{2} س د س

$\therefore$ د س = $\frac{1}{\text{قا}^{2}\text{س}}$ د ص

$\therefore$ $\int$ قا^{2} س ظا^{2} س د س

= $\int$ ص^{2} . قا^{2}س × $\frac{1}{\text{قا}^{2}\text{س}}$ د ص

= $\int$ ص^{2} د ص

= $\frac{\text{ص}^{3}}{3}$ + جـ

= $\frac{\text{ظا}^{3}\text{س}}{3}$ + جـ .... (٢)

وبعد دمج (١) مع (٢) ينتج:

$\int$ قا^{4} س د س = ظا س + $\frac{1}{3}$ ظا^{3} س + جـ

مثال (١٧):

أوجد $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - 1}$ د س

أولاً بالتعويض:

نفرض أن ص = $\sqrt{\text{س}}$ ⟵ ص^{2} = س

$\therefore$ د ص = $\frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$ د س ومنها د س = ٢ $\sqrt{\text{س}}$ د ص

$\therefore$ $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - 1}$ د س

$$= \int \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{٢} - ١} \; (٢\,\text{ص})\; \text{د ص}$$

ثم القسمة الطويلة حيث درجة البسط = درجة المقام

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ٢\text{ص}^{٢} & \text{ص}^{٢} - ١ \\ \mp ٢\text{ص}^{٢} \pm ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{٢\,\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ١} \; \text{د ص} = \int \left(٢ + \frac{٢}{\text{ص}^{٢} - ١}\right) \text{د ص}$$

ثم نجزيء $\frac{٢}{\text{ص}^{٢} - ١} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} + ١} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ١}$

$$\frac{٢}{\text{ص}^{٢} - ١} = \frac{\text{أ}\,(\text{ص} - ١) + \text{ب}\,(\text{ص} + ١)}{(\text{ص} + ١)\,(\text{ص} - ١)}$$

لاعدام أ نعوض ص = ١

$$٢ = ٧٢ \longleftarrow \text{ب} = ١$$

لاعدام ب نعوض ص = - ١

$$٢ = - ٢\text{أ} \longleftarrow \text{أ} = - ١$$

$$\therefore \int \frac{٢\,\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ١} \; \text{د ص} = \int \left(٢ - \frac{١}{\text{ص} + ١} + \frac{١}{\text{ص} - ١}\right) \text{د ص}$$

$$= ٢\,\text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\text{ص} + ١) + \frac{١}{\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ص} - ١} = ٢\sqrt{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\sqrt{\text{س}} + ١) + \text{لو}_{\text{هـ}}\,(\sqrt{\text{س}} - ١)$$

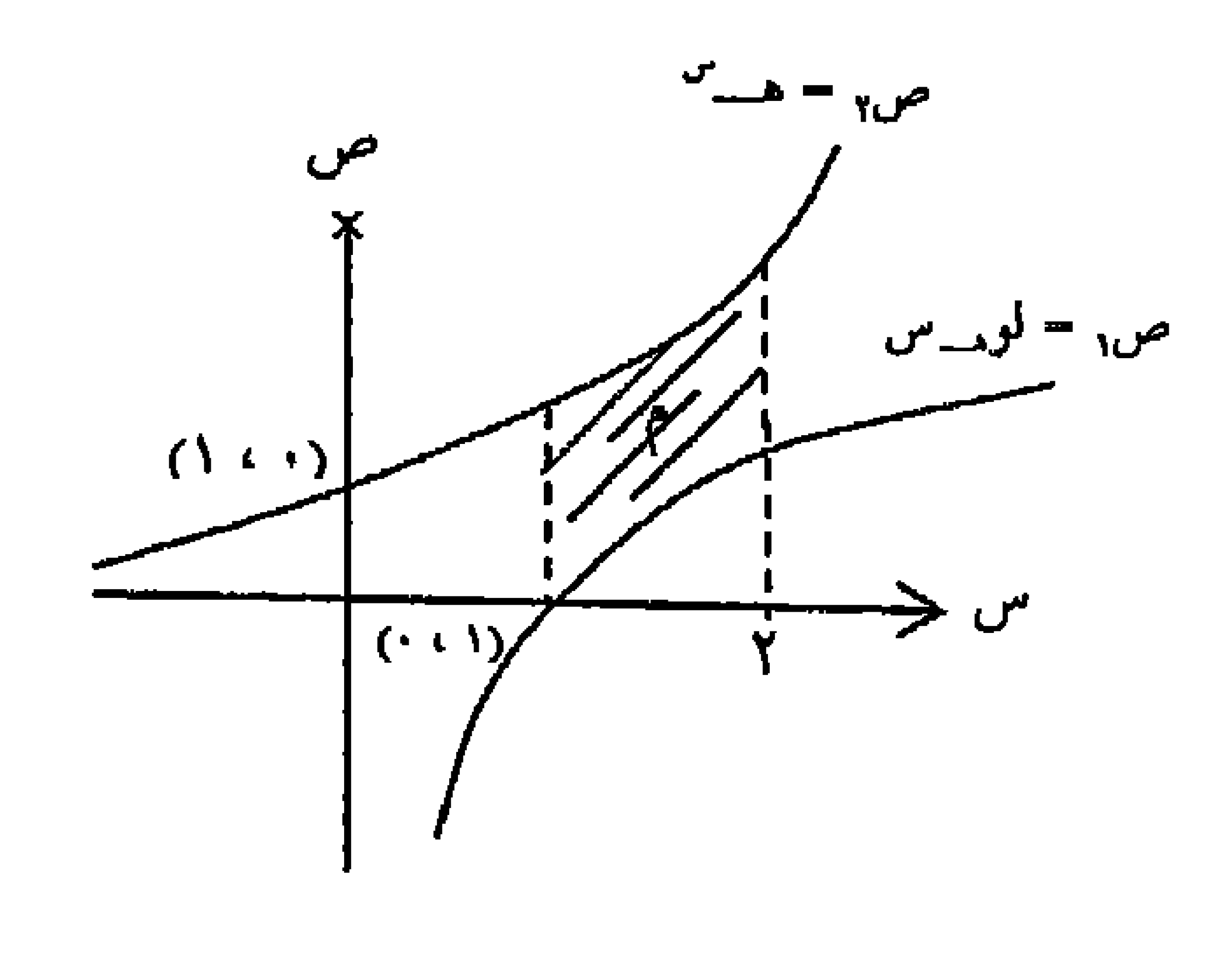
$$= ٢\sqrt{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\; \frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\sqrt{\text{س}} + ١} + \text{جـ}$$

مثال (١٨):

أوجد المساحة المحصورة بين منحنيي

$\text{ص}_{\text{١}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{ص}_{\text{٢}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

والمستقيمين س = ١ ، س = ٢



$$\text{م} = \int_{\text{١}}^{\text{٢}} (\text{هـ}^{\text{س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\, \text{د س}$$

$$= \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{د س} - \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\, \text{د س}$$

$$= \left[\text{هـ}^{\text{س}}\right]_{\text{١}}^{\text{٢}} - \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\, \text{د س}$$ وهذا التكامل بالأجزاء ...... (١)

(١) $\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ (٣) $\int \text{د هـ} = \int \text{د س}$

(٢) $\text{د ق} = \frac{\text{١}}{\text{س}}\, \text{د س}$ (٤) $\text{هـ} = \text{س}$

لكن $\int \text{ق} \cdot \text{د هـ} = \text{ق} \cdot \text{هـ} - \int \text{هـ} \cdot \text{د ق}$ قاعدة التكامل بالأجزاء

$$\therefore \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\, \text{د س} = \left[\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}\right]_{\text{١}}^{\text{٢}} - \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{س} \times \frac{\text{١}}{\text{س}}\, \text{د س}$$

$$= \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{١}\, \text{د س}$$

$$= \left[\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{س}\right]_{\text{١}}^{\text{٢}}$$ .... (٢)

وبعد دمج (١) مع (٢) ينتج أن:

$$\text{م} = \left[\text{هـ}^{\text{س}} - \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}\right]_{\text{١}}^{\text{٢}}$$

∴ م = (هـ^{٢} − ٢ لو$_{هـ}$^{٢} + ٢) − (هـ^{١} − ١ لو$_{هـ}$^{١} + ١)

= هـ^{٢} − ٢ لو$_{هـ}$^{٢} + ٢ − هـ^{١} + لو$_{هـ}$^{١} - ١

= هـ^{٢} − هـ^{١} − لو$_{هـ}$^{٤} + لو$_{هـ}$^{١} + ٢ - ١

= هـ^{٢} − هـ^{١} − لو$_{هـ}$^{٤} + صفر + ١

= هـ^{٢} − هـ + ١ − لو$_{هـ}$^{٤} وحدة مساحة

"أي (٢,٧٢)^{٢} − (٢,٧٢) + ١ − لو$_{هـ}$^{٤}" وحدة مساحة.

مثال (١٩):

اذا كان ق (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ قابلاً للتكامل في [- ٣ ، ٣] بيّن دون اجراء التكامل أن ٠ ≤ $\int_{-٢}^{٢}$ ق (س) د س ≤ ١٨

الحل:

نحصر الاقتران ق (س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ بين عددين يمثل أحدهما أصغر قيمة له في الفترة [- ٣ ، ٣] والثاني أكبر قيمة له في الفترة.٠

عندما س = ٣

٣- ——— ٣

فإن ق (٣) = $\sqrt{٩ - ٩}$ = صفر أصغر قيمة للاقتران

وعندما س = صفر

فإن ن (٠) = $\sqrt{٩ - ٠^{٢}}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣ أكبر قيمة للاقتران.

∴ ٠ ≤ ق (س) ≤ ٣ في الفترة [- ٣ ، ٣]

∴ ٠ ≤ $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ ≤ ٣

وبتكامل طرفي المتباينة دون وسطها هكذا:

$$\int_{-3}^{3} 0 \, د س \leq \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - س^2} \, د س \leq \int_{-3}^{3} 3 \, د س$$

$$\therefore \; 0 \, (3 - -3) \leq \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - س^2} \, د س \leq 3 \, (3 - -3)$$

$$0 \, (6) \leq \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - س^2} \, د س \leq 3 \, (6)$$

ومنها $صفر \leq \int_{-3}^{3} \sqrt{9 - س^2} \, د س \leq 18$ وهذا المطلوب

مثال (٢٠):

(i) اذا كانت سرعة جسيم تعطى بالعلاقة $ع = 5 ن^4 + 6 ن^2$ ما المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثانيتين من حركته؟ علماً بأنه قد قطع مسافة ١٠ متر بعد الثانية الأولى من حركته.

بما أن $ع = 5 ن^4 + 6 ن^2$

وان $ف = \int ع \, د ن = \int (5 ن^4 + 6 ن^2) \, د ن$

$$ف = \frac{5 ن^5}{5} + \frac{6 ن^3}{3} + جـ = ن^5 + 2 ن^3 + جـ$$

لكن $ف \big|_{ن=1} = (1)^5 + 2 (1)^3 + جـ = 10$

ومنها $1 + 2 + جـ = 10$

$\therefore \; جـ = 7$

$\therefore \; ف = ن^5 + 2 ن^3 + 7$

$\therefore \; ف \big|_{ن=2} = (2)^5 + 2 (2)^3 + 7 = 32 + 16 + 7 = 55$ متراً

(ii) اذا كان ميل المماس للمنحنى ق (س) عند النقطة أ (١ ، ٥) يساوي ٤

وكانت قً (س) = ١٢ س − ٨ أوجد قاعدة ق (س)

الحل:

بما أن قَ (س) = ∫ قً (س) د س = ∫ (١٢ س − ٨) د س = ٦ س^{٢} − ٨ س + جـ

∴ قَ (س) = ٦ س^{٢} − ٨ س + جـ المشتقة الأولى

ولما كان ميل المماس = قَ (١)

∴ قَ (١) = ٦ (١)^{٢} − ٨ (١) + جـ = ٤

∴ ٦ − ٨ + جـ = ٤

∴ جـ = ٦

لكن ق (س) = ∫ قَ (س) د س = ∫ (٦ س^{٢} − ٨ س + ٦) د س

∴ ق (س) = $\frac{٦ س^{٣}}{٣}$ − $\frac{٨ س^{٢}}{٣}$ + ٦ س + جـ

= ٢ س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٦ س + جـ

وبما أن الاقتران يمر بالنقطة أ (١ ، ٥) كونها نقطة التماس الواقعة عليه

∴ ق (١) = ٥

∴ ق (١) = ٢ (١)^{٣} − ٤(١)^{٢} + ٦ (١) + جـ = ٥

ومنه ٢ − ٤ + ٦ + جـ = ٥

∴ جـ = ١

∴ ق (س) = ٢ س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٦ س + ١   قاعدة الاقتران

(٢٢- ٧) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) أوجد $\int (٣\,س + ٢)^{٢}$ د س

(٢) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$ق(س) = ٢\,س^{٣} - ٣\,س^{٢} + ١$ والمحورين

(٣) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٣}$ ومماسه عند س = ٣ ومحور السينات.

(٤) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ق(س) = س^{٢} + ٤$ والمنحنى $هـ(س) = ٦ - س^{٢}$

(٥) أوجد قيمة $\int_{٠}^{١} \frac{س^{٤} + س^{٢} + ١}{س^{٢} + س + ١}$ د س $\left\{ \frac{٥}{٦} \right\}$

استعن بالقسمة الطويلة

(٦) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنيين $ق(س) = \sqrt{س}$ ، $هـ(س) = س^{٢}$

$\left\{ \frac{١}{٣} \right.$ وحدة مساحة $\left. \right\}$

(٧) أجرِ التكاملات التالية:

(١) $\int \frac{٥\,س^{٢}}{س^{٤} + ٩}$ $\left\{ \frac{٥}{٤} لوهـ(س^{٤} + ٩) + جـ \right\}$

{ ارشاد: تعويض أو البسط يظهر في مشتقه المقام > اقتران لوغارتمي}

(٢) $\int \frac{س}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ $\left\{ -\sqrt{١ - س^{٢}} + جـ \right\}$

(٨) ما قيمة $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٤}} س\,قا^{٢}\,س$ د س $\left\{ \left(\frac{١}{٤} - \frac{\sqrt{٣}}{٣} \right) \pi \; لوهـ \sqrt{٢} \right\}$

{ ارشاد: بالأجزاء }

(٩) أوجد $\int$ جتا$\sqrt{س}$ د س

{ بالتعويض ثم الأجزاء }

ص = $\sqrt{س}$

(١٠) أوجد $\int$ س^٢ جتا ٢ س د س

{بالتعويض ثم الأجزاء}

ص = ٢ س

{$\frac{٤}{٨}$ س^٢ جا ٢ س + $\frac{٤ س}{٨}$ جتا ٢ س - $\frac{٢}{٨}$ جا ٢ س + جـ }

(١١) أوجد $\int$ $\frac{١}{س^٢ - أ^٢}$ د س

{ بالكسور الجزئية}

{$\frac{١}{٢ أ}$ لوهـ $\frac{س - أ}{س + أ}$ + جـ }

(١٢) أوجد $\int$ $\frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س} - هـ^{-س}}$ د س

{البسط مشتقه المقام }

اقتران لوغارتمي

{ لوهـ (هـ^{٢س} - ١) - لوهـ هـ^{س} + جـ }

(١٣) أوجد قيمة $\int_{٠}^{١}$ س^٢ هـ^{س} د س { بالأجزاء }

{ هـ - ٢ }

(١٤) أجر التكاملات التالية:

(١) $\int$ هـ^{أس} د س { $\frac{١}{أ}$ هـ^{أس} + جـ، تعويض أو اقتران نسبي }

(٢) $\int$ جا أ س د س { - $\frac{١}{أ}$ جتا أ س + جـ ، تعويض }

(٣) $\int$ جا^{٢} س د س { $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + جـ ، اذابة القوى}

(٤) $\int$ جتا^{٢} س دج س { $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + جـ ، اذابة القوى }

(٥) $\int \frac{س}{س^{٢} + أ}$ د س { $\frac{١}{٢}$ لوهـ (س^{٢} + أ) + جـ، البسط مشتقه المقام أو تعويض}

(٦) $\int \frac{س}{\sqrt{س^{٢} + أ}}$ د س { $\sqrt{س^{٢} + أ}$ + جـ ، تعويض }

(٧) $\int \sqrt{س}$ (١ + $\sqrt{س}$) د س { $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{س^{٣}}$ + $\frac{١}{٢}$ س^{٢}} ، القانون

(٨) $\int$ (جتاس + قاس)^{٢} د س { $\frac{٥}{٢}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + ظاس + جـ}

(٩) $\int$ ٣ س $\sqrt[٣]{س + ١}$ د س

(١٠) $\int \frac{جتا^{٢} س}{١ + جا س}$ د س

{ س + جتاس + جـ، استبدل جتا^{٢}س = ١- جا^{٢}س ثم س}

(١١) $\int$ ٦ س^{٥} (١ - $\frac{١}{س}$)^{٥} د س

{ (س - ١)^{٦} + جـ، أدخل س^{٥} داخل القوس }

(١٢) $\int$ (١ + ظا^{٢} $\frac{س}{٢}$) د س {٢ ظا $\frac{س}{٢}$ + جـ ، استعن بالمتطابقة قا^{٢}س = ١ + ظا^{٢}س }

(١٣) $\int$ جا س جتا س د س {- $\frac{١}{٤}$ جتا ٢ س + جـ }

(١٤) $\int$ (٤ س^{٢} + ٤ س + ١)^{٢} د س { $\frac{٢}{١٠}$ (٢س + ١)^{٥} + جـ ، فك القوس أو حوله الى اقتران خطي}

(١٥) $\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{جتا س + جا س}}$ د س {جاس + جتاس + جـ ، استعن بالمتطابقة جتا٢س = جتا^{٢} س − جا^{٢} س}

(١٦) $\int$ (جا س +جتاس)^{٢} د س {س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س + جـ ، فك القوس}

(١٧) $\int$ جتا س (جاس + ظاس) د س {− $\frac{١}{٤}$ جتا٢ س − جتا س + جـ }

(١٨) $\int \frac{\text{جتا ٢ س}}{\text{١ −}\sqrt{٢}\text{ جا س}}$ د س { س −$\sqrt{٢}$ جتا س + جـ

استعن بالمتطابقة جتا^{٢}س = ١− ٢ جا^{٢}س والتحليل }

(١٥) اذا كان ميل المماس للمنحنى ق (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي ٢− $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{١}{٢}$ ، ١) أوجد قاعدة الاقتران ق (س)

{ق (س) = ٢ س + $\frac{١}{\text{س}}$ − ٢ }

(١٦) اذا كان ميل المماس للمنحنى ق (س) عند أي نقطة عليه (س ، ص) يساوي ٣ س^{٢} − ٦ س − ٩ والقيمة العظمى المحلية له هي ١٧، أوجد القيمة الصغرى المحلية له. { − ١٥ }

(١٧) إذا:

(١) علمت أن ص = $\int$ (س^{٢} − س) د س فأوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ {س^{٢} − س}

(٢) علمت أن $\int_{١}^{\text{هـ}}$ ٥ د س = ١٠ فما قيمة هـ {٣}

(٣) كان $\int_{١}^{٢}$ ٥ ق (س) د س = ١٥ فإن $\int_{٢}^{١}$ (ق (س) − ٥) د س = { ٧ }

(٤) كان الايراد الحدي لسلعة يعطى بالعلاقة دَ (س) = ٤ س − ١ فإن قيمة الايراد الكلي عندما س = ٥ هو { ٤٥ دينار }

(١٨) اذا كان منحنى اقتران السعر- العرض معطى بالعلاقة:

$ع = هـ(س) = \frac{١}{٣} س^{٢} + ٤$ وثبت السعر عندما $ع_{١} = ٣١$

احسب فائض المنتج؟

(١٩) ينحل عنصر مشع تبعاً لقانون الاضمحلال التالي $ع_{(ن)} = ع_{٠} \times هـ^{أن}$ حيث

$هـ = ٢,٧$ ، $ع_{(ن)}$ الكتلة المتبقية منه بعد ن سنة ، $ع_{٠}$ الكتلة عند بدء هذا الزمن. فإذا علمت أن:

$ع_{٠} = ١٠٠$ غم ، $أ = -٠,٠٥$

ن = ٢٠ سنة

أوجد $ع_{(٢٠)}$ {٤٠,٨ غم}

(٢٠) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $ق(س) = ٦ س - ٣ س^{٢}$ ومحور السينات. { ٤ وحدات مساحة}

(٢١) أوجد: (١) $\int_{٠}^{١}$ جا ص د س { جا ص }

(٢) $\int_{-١}^{٠} هـ^{-٢}$ د س { $هـ^{-٢}$ }

(٢٢) أجر التكاملات التالية:

(١) $\int$ س جا س د س

(٢) $\int$ س $هـ^{س}$ د س

(٣) $\int$ س $لو_{هـ}$ س د س

(٤) $\int$ س جتا س د س

(٥) $\int$ س ظا س د س

{ ارشاد: استعن بطريقة الأجزاء }

(٢٣) أوجد $\int_{١}^{٢} [\,س\,]\ د\,س$ { ٣ }

ثم أوجد $\int_{١}^{٢} [\,-\ س\,]\ د\,س$ { - ٤ }

{ارشاد: اذا كان مُعامل س في اقتران صحيح س موجباً نعوض الحد الأسفل

واذا كان معامل س في اقتران صحيح س سالباً نعوض الحد الأعلى}

(٢٤) اذا كان $\int_{١}^{٥} ق\,(س)\ د\,س = ٦$ ، $\int_{١}^{٧} ق\,(س)\ د\,س = ١٣$

أوجد قيمة $\int_{٧}^{٥} ق\,(س)\ د\,س$ { - ٧ }

{ ارشاد: استعن بخاصية الاضافة }

(٢٥) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ٣\,س^{٢} & ، \quad ٠ \leq س \leq ٢ \\ ٤\,س & ، \quad ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$

أوجد $\int_{٠}^{٥} ق\,(س)\ د\,س$ { ٥٠ }

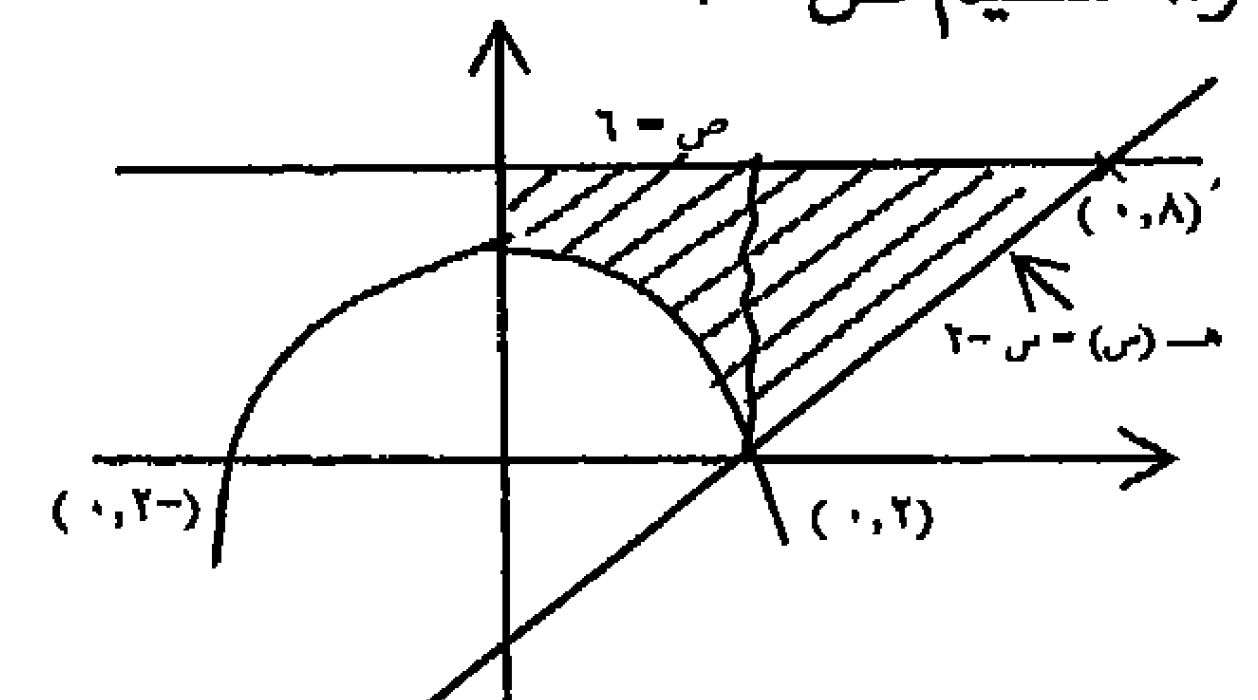
(٢٦) ان كانت قً (س) للاقتران ق (س) تساوي $١٢\,س^{٢} + ٦\,س - ٣٦$ أوجد قاعدة الاقتران ق (س) علماً بأنه يمر بالنقطة (١ ، - ٤) وان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند هذه النقطة يساوي - ٥

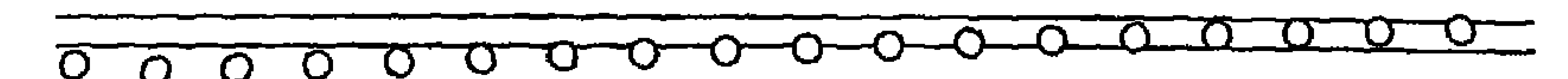
{$ق\,(س) = س^{٤} + س^{٣} - ١٨\,س^{٢} + ٢٤\,س - ١٢$ }

(٢٧) احسب مساحة المنطقة المحدودة بالاقتران ق (س) = $٤ - س^{٢}$ والاقتران هـ(س) = س - ٢ ومحور الصادات والمستقيم ص = ٦

استعن بالشكل المجاور

{ $\frac{٧٤}{٣}$ }





(٢٨) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الاقتران ق (س) = ٣ − س^{٢} والاقتران هـ (س) = | ٢ س |

استعن بالشكل المجاور

$\{ \frac{٣٧}{٦} \}$

(٢٩) أوجد $\int^{٢} \sqrt{س^{٢} - ٢\,س + ١}$ د س $\{ ١ \}$

{ ارشاد : $\sqrt{س^{٢} - ٢\,س + ١} = \sqrt{(س - ١)^{٢}} = |س - ١|$ ثم أعد التعريف }

(٣٠) أوجد $\int \frac{١}{(٢س - ١) + \sqrt{٢\,س + ١}}$ د س

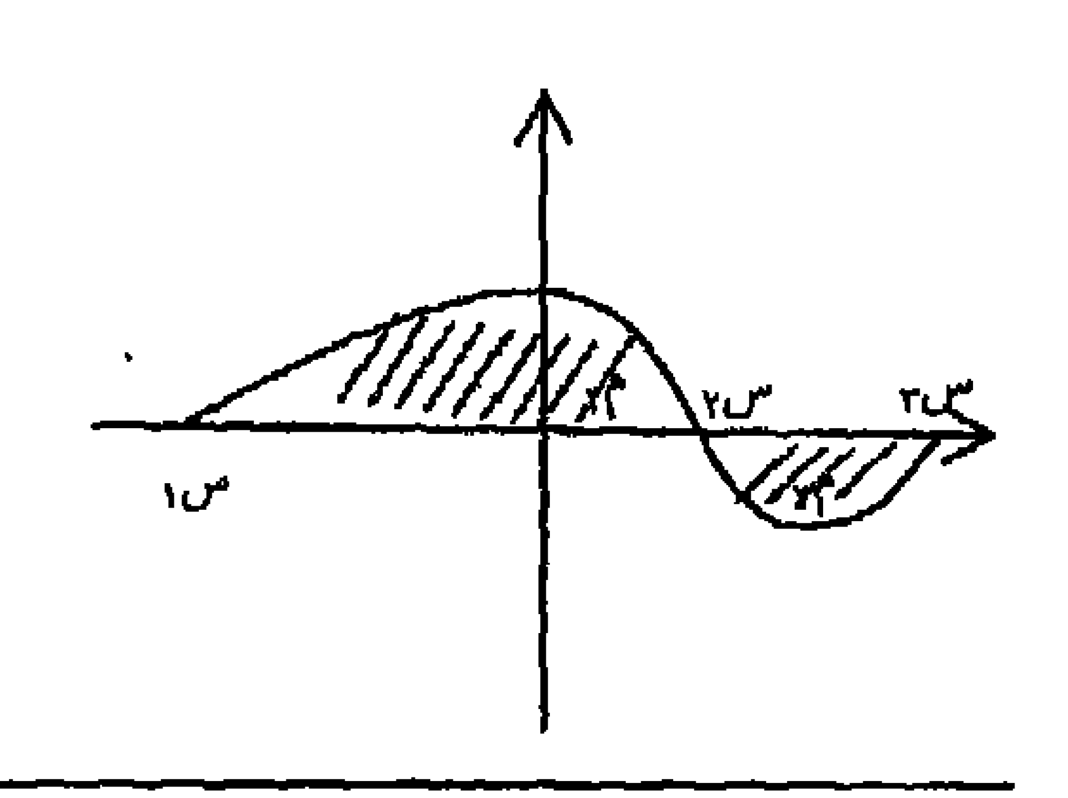
$\{ \frac{٢}{٣}$ لو$_{هـ} (\sqrt{٢\,س + ١} + ٢) + \frac{١}{٣}$ لو$_{هـ} (\sqrt{٢\,س + ١} - ١) +$ جـ $\}$

{ ارشاد : تعويض ص = ٢ س + ١ ثم كسور جزئية }

(٣١) ما قيمة $\int_{١}^{٣} (س\,[س] - ١)$ د س ؟ $\{ ٤٥ \}$

{ ارشاد : أعد تعريف الاقتران }

(٣٢) اذا كان ق (س) = س ، هـ (س) = جـ س^{٣} حيث جـ > صفر يتقاطعان في التطبيق (٠ ، ٠) ، $(\frac{١}{جـ} ، \frac{١}{جـ^{٢}})$ ما قيمة جـ لتكون المساحة بين الاقترانين = $\frac{٢}{٣}$ وحدة مربعة. $\{ \frac{١}{٢} \}$



(٣٣) اعتمد على الشكل المجاور والذي يمثل منحنى ق (س) متقاطعاً في محور السينات في س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$.

فإذا كان $\int_{س_{١}}^{س_{٣}}$ ق (س) د س = ٢٠

وكانت مساحة المنطقة م$_{2}$ = ٥ وحدة مربعة فما مساحة المنطقة م$_{1}$ ؟

{ ٢٥ }

(٣٤) ما قيمة $\int_{0}^{3} \sqrt{3 - س}$ د س { ٣.٤٦٤ }

(٣٥) اذا كانت ص = $\int$ ٣ س^{2} د س أوجد $\frac{د ص}{د س}$ { ٣ س^{2} }

ص = $\int_{0}^{5}$ ٣ س^{2} د س أوجد $\frac{د ص}{د س}$ { صفر }

(٣٦) اذا كان منحنى السعر – الطلب ع = ق (س) = ٦٥ - ٣ س

وكان منحنى السعر – العرض ع = هـ (س) = ٢٥ + س

أوجد فائض المستهلك وفائض المنتج.

(٣٧) اذا كان $\int$ ق (س) د س = س^{3} – ٣ س^{2} + جـ أوجد ق (١) { - ٣}

{ ارشاد : اشتق الطرفين }

(٣٨) أجر التكاملات التالية:

(١) $\int$ س (لو$_{هـ}$ س)^{2} د س تعويض { $\frac{1}{3}$ (لو$_{هـ}$ س)^{3} + جـ }

(٢) $\int \frac{2 س - 3}{س^{2} - 3 س - 4}$ د س كسور جزئية

(٣) $\int$ جا س جتا^{2} (جتا س) د س تعويض

(٣٩) أودع عدنان مبلغ ٥٠٠٠ دينار في حساب التوفير لدى أحد البنوك باسم ابنه سنان بمعدل فائدة ٧٪ سنوياً، واحتسب البنك الفائدة باستمرار تبعاً لقانون النمو، ما مجمل مبلغه بعد ٧ سنوات؟

(٤٠) أجرِ التكاملات التالية:

(١) $\int$ جا^{4} س جتا س د س {$\frac{1}{5}$ جا^{5} س + جـ }

{ ارشاد : تعويض ص = جا س }

(٢) $\int$ س جا $س^٢$ د س { $-\frac{١}{٢}$ جتا $س^٢$ + جـ }

{ ارشاد: تعويض ص = $س^٢$ }

(٤١) ما قيمة $\int_{-١}^{٢}$ جا π س د س { صفر }

{ ارشاد: تعويض ص = π س }

(٤٢) ما قيمة $\int_{٠}^{١} \frac{س^٥}{(س^٦ + ١)^٣}$ د س { $\frac{١}{١٦}$ }

(٤٣) أوجد $\int \frac{س^٤}{س^٥ + ١}$ د س { $\frac{١}{٥}$ لوهـ($س^٥$ + ١) + جـ }

{ ارشاد: البسط يظهر في مشتقه المقام }

(٤٤) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق (س) = جا س ، هـ(س) = جتا س في الفترة [٠ ، $\frac{π}{٥}$] { $\sqrt{٢}$ − ١ وحدة مساحة }

(٤٥) اذا كان ق (س) = $\int$ (جا س + جتا س) د س أوجد قَ ($\frac{π}{٢}$) { ١ }

{ ارشاد: استعن بمفهوم التكامل $\int$ قَ (س) د س = ق (س) }

(٤٦) أجرِ التكاملات التالية:

(١) $\int \frac{٥}{جتا^٢ س}$ د س {٥ ظا س + جـ }

(٢) $\int$ جتاس ظا س د س { − جتا س + جـ }

ثم احسب قيمة $\int_{١}^{٤} \sqrt{س}$ د س

(٤٧) اذا كان: (١) $\int_{-٢}^{١}$ ك د س = ٢٨ فما قيمة ك ؟

(٢) $\int_{٠}^{ك}$ س د س = ٨ فما قيمة ك ؟

(٣) $\int_{ك}^{-٢}$ ٨ د س = ٢٤ فما قيمة ك ؟

(٤٨) اذا كانت قَ (س) = ٦ س هي مشتقة ق (س) على الفترة [- ٢ ، ٣] فما قيمة ق (٣) – ق (- ٢) ؟ { ١٥ }

(٤٩) ما مساحة المنطقة المحدودة بالاقترانين ق(س) = س^٤ ، هـ (س) = $\sqrt{س}$ ؟

(٥٠) أوجد $\int \frac{٢س + ٣}{س^٢ + ٤س - ٥}$ د س { كسور جزئية }

{ $\frac{١}{٦}$ لوهـ (س + ٥)^٧ (س - ١)^٥ }

(٥١) ضع أحد الرموز التالية > ، < ، = داخل الدائرة في العبارة:

$\int_{٠}^{٣} |٢س - ٤|$ د س ◯ $\int_{٢}^{٥} |٦ - ٢س|$ د س { = }

(٥٢) أوجد: (١) $\int_{٠}^{٤} [\frac{١}{٢} س]$ د س { ٢ }

(٢) $\int_{٠,٥}^{١,٥} [٢س + ٠,٤]$ د س { ١,٩ }

{ ارشاد: لمعرفة البداية نصفر الاقتران }

(٥٣) ما اشارة كل من التكاملين:

(١) ق (س) = $\int_{١}^{٢} \frac{٢س + ٥}{س^٢ + ١}$ د س { موجب }

(٢) هـ (س) = $\int_{١}^{٢} \frac{٢س - ٥}{س^٢ + ١}$ د س { سالب }

{ ارشاد: اشارة التكامل نفس اشارة الاقتران حسب خاصية المقارنة }

(٥٤) اذا كان $\int_{أ}^{-أ}$ (أ س – أ) د س = ١٨ ، فما قيمة أ ؟ { - ٣ ، ٣ }

(٥٥) ما قيمة (١) $\int_{١}^{٢} (س^٢ - ٢س + ١)^٣$ د س { $\frac{١}{٧}$ }

(٢) $\int_{-٢}^{٢} |٣ - ٣س^٢|$ د س { ٢٨ }

(٥٦) أجر التكاملات التالية:

(١) $\int$ $\frac{\text{جا}^2\text{س} + 1}{\text{جا}^2\text{س}}$ د س { - جتا س − ظتا س + جـ }

{ ارشاد: تجزئة الكسر }

(٢) $\int$ $\frac{1}{2 - 2\ \text{جتا س}}$ د س {- $\frac{1}{2}$ ظتا س - $\frac{1}{2}$ قتا س + جـ }

{ ارشاد: انطق المقام }

(٥٧) أوجد $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$ جتا θ د س ، {θ ثابت} { π جتا θ }

(٥٨) حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جا٢ س}}{\text{جتا٣ ص}}$

{$\frac{1}{3}$ جا ٣ س = $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س + جـ }

(٥٩) أوجد قاعدة الاقتران الذي يمر منحناه في النقطة (- ٢ ، ٩) وميل المماس عند أي نقطة عليه هو (٣ س - ٢) (س + ٢)

{ق (س) = س^3 + ٢ س^2 - ٤ س + ١}

(٦٠) تحرك جسيم في خط مستقيم ابتداء من نقطة الأصل بتسارع حسب العلاقة ت = ٦ ن (١ − ن^2) ،

احسب السرعة والمسافة عند أي نقطة، اذا كانت السرعة تساوي ١ م/ث بعد ثانية واحدة.

{ ع = ٣ ن^2 − $\frac{6}{4}$ ن − $\frac{1}{2}$ ، ف = ن^3 − $\frac{3}{10}$ ن^2 - $\frac{1}{2}$ ن}

(٦١) أوجد $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ جا س جتا س د س { صفر }

(٦٢) اذا كان ق (١) = ١ ، ق (٤) = ٩ ، $\int_{1}^{4}$ ق (س) د س = ٧

أوجد $\int_{1}^{16} \frac{ق(\sqrt{س})}{\sqrt{س}}$ د س { تعويض: ص = $\sqrt{س}$ ، {١٤}}

(٦٣) أوجد $\int \frac{1}{س^2}$ جتا $\frac{1}{س}$ د س { - جا $\frac{1}{س}$ + جـ }

(٦٤) أوجد $\int_{0}^{\pi}$ س^2 جتا س د س { $\frac{\pi^2}{4}$ - ٢ ، بالأجزاء }

(٦٥) إذا كان هـ (١) = هـَ (١) = ٤ ، هـ (٢) = ٥ ، هـَ (٢) = - ٣

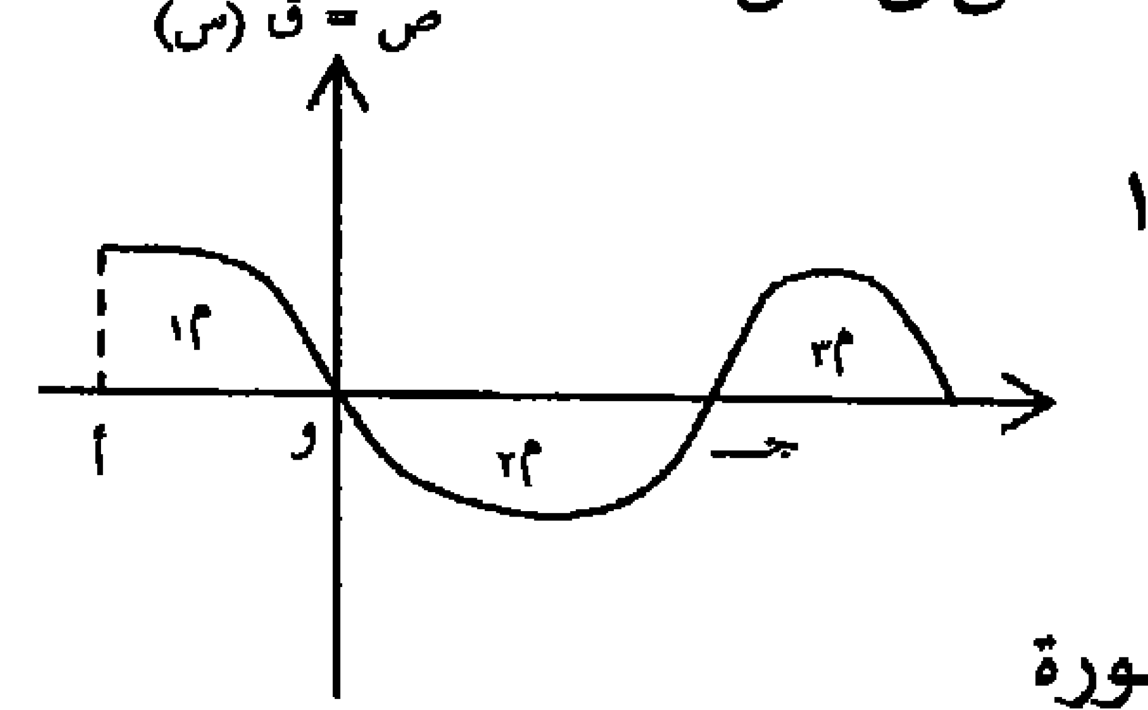
أوجد $\int_{1}^{2}$ س هـً (س) س { {- ١١} ، بالأجزاء }

(٦٦) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق (س) = $\sqrt{س}$ ،
هـ(س) = - $\sqrt{س}$ ، والمستقيم س = ٤ { $\frac{32}{3}$ }

(٦٧) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = جتا س
ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = π { ٢ }

{ ارشاد: مساحتين }

(٦٨) اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحنى ق (س)



وكانت م$_1$ = ٦ ، م$_2$ = ٨ ، م$_3$ = ١٠

أوجد: (١) $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س {٨}

(٢) مساحة المنطقة المحصورة

بين منحنى ق (س) ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

{ ٢٤ وحدة مساحة }

(٦٩) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١$ والمحورين

$\{\frac{١}{٦}\}$

(٧٠) أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = ٤ $س^٢$ − ١٠٠ س ومحور السينات.

{ ١٢٥ }

(٧١) اوجد المساحة المحصورة بين الاقترانين ق (س) = $\sqrt{س}$ ، هـ (س) = $\sqrt[٣]{س}$

$\{\frac{١}{١٢}\}$

(٧٢) أوجد المساحة المحصورة بين الاقتران ق (س) = | س | ومحور السينات والمستقيمين س = − ٢ ، س = ٥

$\{\frac{٢٩}{٢}\}$

(٧٣) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين $ق_١$ (س) = س ، $ق_٢$ (س) = ١ − س ومحور السينات

$\{\frac{١}{٤}\}$

{ ارشاد : أكثر من منطقة }

(٧٤) أوجد قيمة $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتا س ٠ $هـ^{جاس}$ د س

{ هـ − ١ }

(٧٥) أوجد $\int \frac{د س}{س^٢ - ١}$ د س

{ كسور جزئية }

(٧٦) اذا كان $\text{م} = \int_{\cdot}^{\pi} \text{جا}^{٢}\text{س د س}$ ، $\text{ن} = \int_{\cdot}^{\pi} \text{جتا}^{٢}\text{س د س}$ ما قيمة م + ن

{ ارشاد: الخاصية الخطية }

(٧٧) ما قيمة $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{جتا ٢ س}}{\sqrt{\text{جا ٢ س}}}\,\text{د س}$ { تعويض }

(٧٨) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ والمحورين والمستقيم س = ٢

(٧٩) أجرِ التكاملات التالية:

(١) $\int_{\cdot}^{\pi} \text{قا}^{٢}\text{س ظا}^{٣}\text{س د س}$ { صفر ، تعويض ص = ظا س }

(٢) $\int_{٢}^{\text{هـ}} \frac{١}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ {- لو$_{\text{هـ}}$ لو$_{\text{هـ}}$٢ ، تعويض ، ص = لو$_{\text{هـ}}$ س }

(٨٠) اذا كان $\int_{-٢}^{٢} \text{ق (س) د س} = ٦$ فما قيمة $\int_{٢}^{-٢} (٥ + ٢\,\text{ق (س)})\,\text{دس}$ { - ٤٢ }

(٨١) حل المعادلة التفاضلية التالية:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ص}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ { $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{ظاس} + \text{جـ}}$ }

(٨٢) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين ق (س) = جا س و هـ (س) = جتا س والمستقيم ص = ١ في الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$]

{ $\frac{\pi}{٢} - \sqrt{٢}$ }

(٨٣) اذا كان $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}} \text{س جا س د س} = \int_{\cdot}^{٢} (\text{أ س}^{٢} + ٢\,\text{س})\,\text{د س}$ ما قيمة أ ؟

{ $-\frac{٩}{٨}$ }

(٨٤) أجرِ التكاملات التالية:

(١) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{د س}$ $\{\text{س لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \text{س} + \text{جـ}\}$

(٢) $\int \frac{١}{\text{س}} (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٢}\ \text{د س}$ $\{\frac{١}{٣} (\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س})^{٣} + \text{جـ}\}$

(٣) $\int \text{س}^{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}\ \text{د س}$ $\{\frac{١}{٣}\text{س}^{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س} - \frac{١}{١٦}\text{س}^{٤} + \text{جـ}\}$

(٨٥) ما قيمة $\int_{\text{هـ}}^{\text{هـ}^{٣}} \frac{١}{\text{س}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{د س}$

$\{\frac{٥}{٢}\}$

(٨٦) أجرِ التكاملات الآتية:

(١) $\int \frac{\text{س جا س}}{\text{جتا}^{٣}\,\text{س}}\ \text{د س}$

{ ارشاد: أجزاء ثم تعويض

$\text{ق} = \text{س}$ ، $\text{د هـ} = \text{جا س جتا}^{-٣}\,\text{س}$ }

(٢) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} + \text{س}}\ \text{د س}$

{ كسور جزئية بعد القسمة الطويلة }

(٨٧) ما قيمة $\int_{٢}^{٥} [\,٢ - \text{س}\,]\ \text{د س}$ $\{-٥\}$

{ ارشاد: عوّض الحد الأعلى كون اشارة س سالبة }

(٨٨) ما قيمة $\int_{٢}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٥} \text{هـ}^{٢\text{س}}\ \text{د س}$

$\{١٢\}$

(٨٩) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢}

والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٩

{ ٦٩ $\frac{١}{٣}$ }

{ ارشاد: عدة مناطق }

(٩٠) انطلق جسيم في خط مستقيم من نقطة أ ، فإذا كانت سرعته ع م/ث بعد زمن مقداره ن ثانية تعطى بالقاعدة:

ع = { ٣ ن^{٢} ، ٠ ≤ ن < ٢
١٦ - ٢ ن ، ٢ ≤ ن ≤ ٨

ما بعده عن النقطة أ بعد ٥ ثواني من بدء انطلاقه؟ { ٣٥ }

(٩١) اذا كان منحنى السعر – الطلب ع = ق (س) = ٥٠ – ٤ س

ومنحنى السعر – العرض ع = هـ (س) = ٢٠ + ٢ س

أوجد سعر التوازن؟

{ ٣٠ }

(٩٢) اذا كان اقتران الايراد الحدي دَ (س) = ٣ س^{٢} – ٢ س + ١ أوجد اقتران الايراد الكلي.

{ س^{٣} – س^{٢} + س }

(٩٣) اذا كان $\int_{٢}^{٦}$ ٣ ق (س) د س = ١٨ ، وكان $\int_{٢}^{٥}$ ق (س) د س = ٢ فما قيمة

$\int_{٦}^{٥}$ ق (س) د س

{ - ٤ }

(٩٤) ما قيمة أ بحيث أن المستقيم س = أ يقسم المساحة المحصورة بين المنحنى

س = $\sqrt{ص}$ ، والمستقيم س = ٢ ومحور السينات الى قسمين متساويين.

{ $\sqrt[3]{٤}$ }

(٩٥) أوجد $\int_{١}^{هـ} \frac{١}{س}$ د س { ١ }

(٩٦) حل المعادلة التفاضلية $\frac{د ص}{د س}$ = ٣ س $ص^{٢}$

{ $-\frac{١}{ص} = \frac{٣}{٢} س^{٢} + جـ$ }

(٩٧) أوجد $\int \frac{جا \sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ د س { - ٢ جتا $\sqrt{س}$ + جـ ، تعويض}

(٩٨) اذا كان $\int_{١}^{٢}$ (٢ س + أ) د س = ١٢ فما قيمة أ ؟

(٩٩) أوجد $\int \frac{س^{٤} + س^{٢} + س}{س^{٤}}$ د س { بالقانون }

(١٠٠) $\int \sqrt{هـ^{س}}$ د س { ٢ $\sqrt{هـ^{س}}$ تعويض }

(١٠١) أوجد (١) $\int_{٥}^{٥} \sqrt{س^{٢} + ٢ س + ١}$ د س { صفر }

(٢) $\int_{-١}^{١}$ (٢ س + ١)^{٢} د س

(١٠٢) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق (س) = س - ٢ ومحور

السينات في الفترة [- ١ ، ٧] ؟

{ ارشاد : هناك أكثر من منطقة }

(١٠٣) أوجد $\int_{٠}^{١} \frac{س^٥ + ١}{س + ١}$ د س

{ ارشاد: قسمة طويلة أو تركيبية }

(١٠٤) اذا كان (١) $\int$ قَ (س) د س = س^٣ + ١ أوجد قَ (٢) { ١٢ }

(٢) $\int_{٠}^{٤}$ (جـ س + ٥) د س = ١٢ أوجد قيمة جـ

(٣) $\int$ هـ (س) د س = ٥ س^٢ + ٤ س + جـ اكتب قاعدة هـ (س)

{ ١٠ س + ٤ }

(١٠٥) أوجد $\int$ هـ$^{-س}$ جتا س د س

{ $\frac{١}{٢}$ (هـ$^{-س}$ جا س − هـ$^{-س}$ جتا س) + جـ }

{ ارشاد: تكامل متكرر بطريقة الأجزاء }

(١٠٦) تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بتسارع ثابت ت مقداره ١٢ م/ث^٢ جد سرعتها بعد مرور ٥ ثوانٍ، علماً بأن سرعتها الابتدائية ع (٠) = ٧ م/ث.

(١٠٧) اذا كان $\int$ ق (س) د س = ٤ س^٣ − ٦ س^٢ + ٢ أوجد قَ (١)

{ ارشاد: فك التكامل بالاشتقاق }

(١٠٨) احسب قيمة $\int_{١}^{٤} \sqrt{س}$ د س ، $\int_{١}^{٤} \frac{١}{س}$ د س ، $\int_{١}^{٤}$ هـ^{س} د س

(١٠٩) اذا كان ق (− ٣) = ١٥ ، ق (− ١) = − ٨ أوجد قيمة $\int_{-٢}^{-١}$ قَ (س) د س

{ ٢٣ }

(١١٠) اذا كانت هـَ (س) = ٦ س هي مشتقة الاقتران هـ (س) الأولى، المعرّف على الفترة [- ٢ ، ٣] أوجد قيمة هـ (٣) - هـ (- ٢)

{ ١٥ }

(١١١) اذا كان:

(١) $\int_{-٢}^{أ}$ ٢ س د س = صفر جد قيمة الثابت أ

(٢) $\int_{-٢}^{ب}$ ٩ $س^{٢}$ د س = ٢١ جد قيمة الثابت ب

(٣) $\int_{١}^{جـ}$ (٢ س - ٤) د س = ١٥ جد قيمة الثابت جـ

(١١٢) أجرِ التكاملات التالية:

(١) $\int$ جتا (س + ٥) د س (٢) $\int \frac{٣}{٣ س + ٥}$ د س

(٣) $\int$ $هـ^{٥ س}$ د س (٦) $\int \frac{١٠ س - ٥}{(س^{٢} - س + ٥)^{٢}}$ د س

(١١٣) أوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى ق (س) = ٣٦ - $س^{٢}$ ومحور السينات.

(١١٤) أوجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ٦ - ٣ س والمستقيمين س = صفر ، س = ٤

(١١٥) اذا كان اقتران الايراد الحدي لبيع أجهزة التلفاز في احدى الشركات هو:

دَ (س) = ١٥٠ $س^{٢}$ - ١٨ س + ٥٠

جد الايراد الكلي الناتج عن بيع ٧ أجهزة تلفاز.

(١١٦) استثمر شخص ٨٠٠٠ دينار في بنك بحساب الفائدة المركبة ومعدلها ٨٪ سنوياً، جد الجملة بعد مرور ٢٥ سنة إذا كانت الفوائد تضاف الى الأصل بشكل مستمر وخاضعة لقانون النمو؟

(١١٧) اذا علمت أن $\int_{-1}^{2}$ ق (س) د س = ١٧ ، $\int_{-1}^{5}$ ق (س) د س = ٢٨

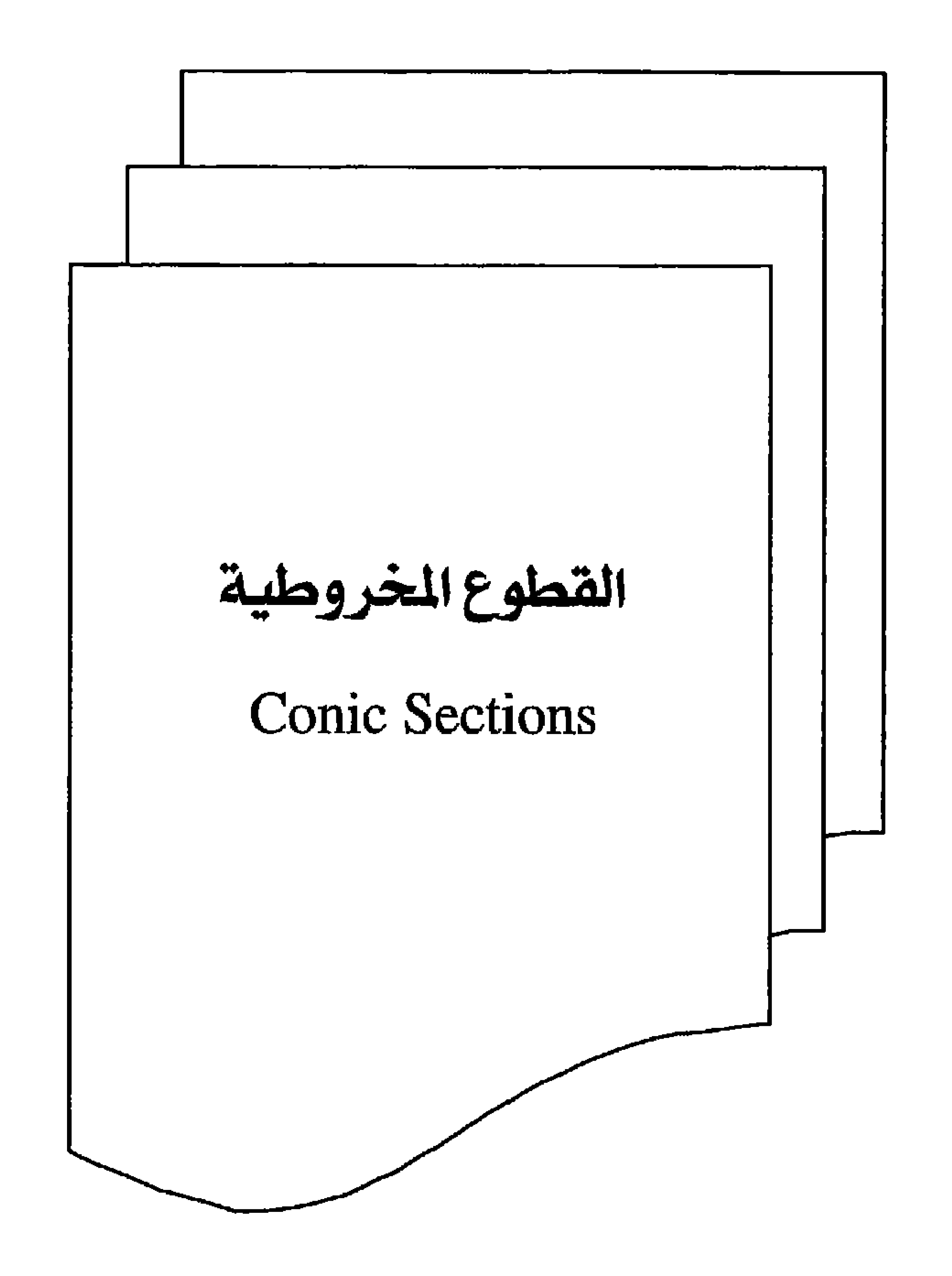
احسب قيمة $\int_{2}^{5}$ ق (س) د س { ٨ }

(١١٨) اذا كان اقتران السعر – الطلب لمنتج معين هو ع = ق (س) = ١٤ - ٢س

واقتران السعر – العرض لنفس المنتج هو ع = هـ (س) = س + ٢

احسب سعر التوازن، وفائض المنتج فقط.

(١١٩) أوجد $\int \frac{-1}{س^2}$ لوهـ $\frac{1}{س}$ د س



القطوع المخروطية

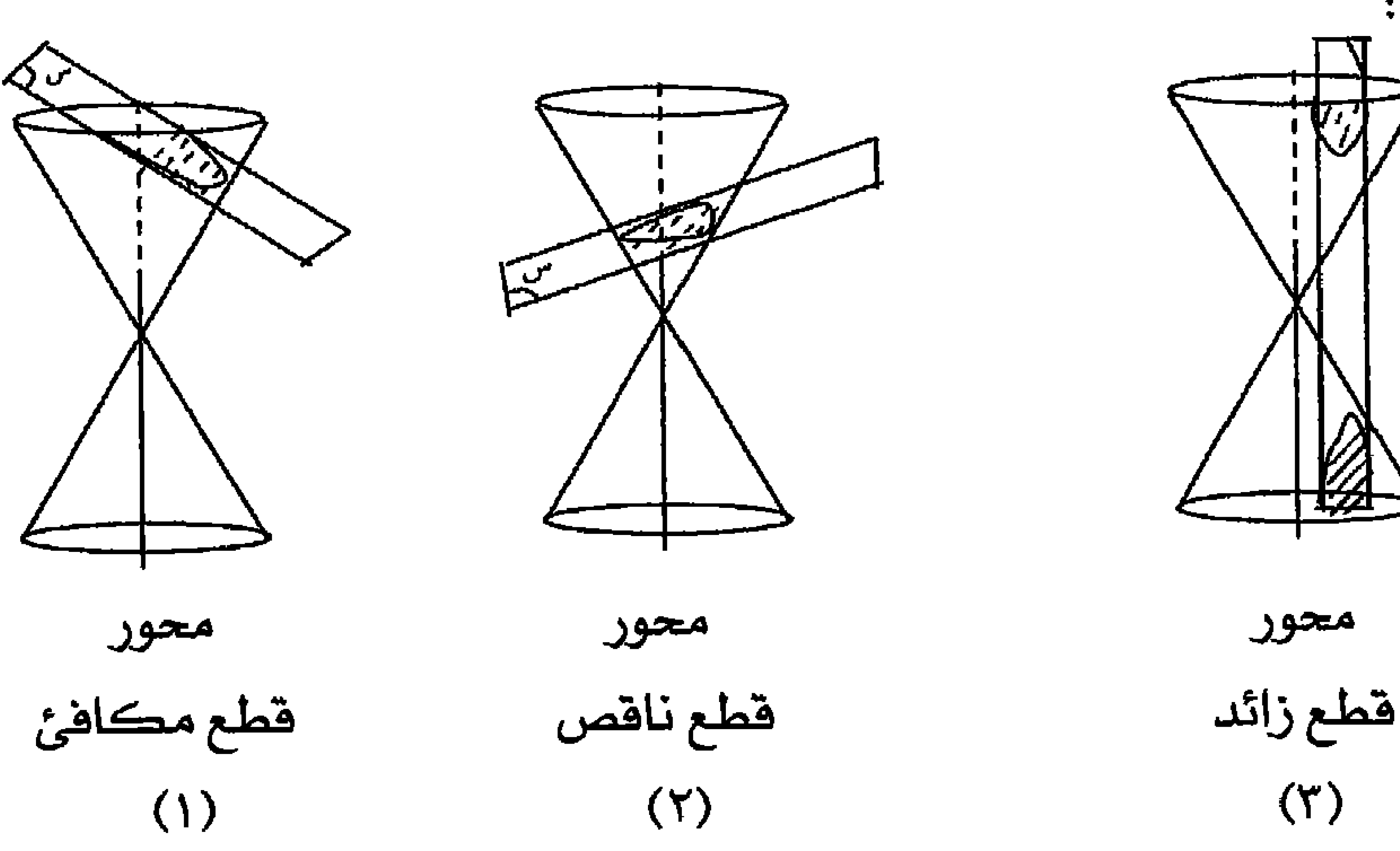
Conic Sections

(٢٣ - ١) القطع المخروطي والمحل الهندسي

تعتبر القطوع المخروطية من أهم مواضيع الهندسة التحليلية على الاطلاق، كونها من الوسائل العلمية لدراسة علم الفضاء، وعلى وجه الخصوص مسارات الكواكب والمذنبات وغيرها من الأجرام السماوية.

سنناقش القطوع المخروطية ومنحنياتها هندسياً وجبرياً هكذا:

يمكن الحصول على القطوع المخروطية هندسياً (عملياً) عند قطع مستوى مخروطاً مزدوجاً مكوناً من مخروطين قائمين ملتقيان بالرأس كما في الأشكال التالية:



محور — قطع مكافئ (١) | محور — قطع ناقص (٢) | محور — قطع زائد (٣)

واننا نلاحظ من الرسم:

(i) ان المستوى س مائل ويقطع فرعاً واحداً من المخروط المزدوج، هذا المقطع يسمى "القطع المكافئ".

(ii) المستوى س مائل ويقطع فرعاً واحداً من المخروط المزدوج هذا القطع يسمى "القطع الناقص".

(iii) المستوى س ليس مائل ويقطع فرعي المخروط ولا يحتوي الرأس هذان المقطعان معاً "يسمى القطع الزائد".

ملحوظة:

وإذا قطع المستوى المخروطين معاً عند الرأس المشترك كان القطع نقطة

واذا قطع المستوى المخروطين معاً وكان منطبقاً على المحور كان القطع مستقيم

هذان المقطعان "النقطة والمستقيم" يسميان قطوع مخروطية منحلة لا نود مناقشتها في هذا المؤلف بالذات.

وأما جبرياً فإن منحنيات هذا القطوع تمثل نوعاً من العلاقات الرياضية بين المتغيرين س ، ص معادلاتها من الدرجة الثانية، وجميعها تنتمي الى المعادلة التالية:

أ س^{2} + ب س^{2} + جـ س + د ص + هـ = صفر

حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية

وان أ ، ب لا يساويان الصفر معاً في آن واحد.

ولعلاقة المحل الهندسي بمنحنيات القطوع المخروطية، سنُذكر به مرة أخرى:

المحل الهندسي Geometric Locus:

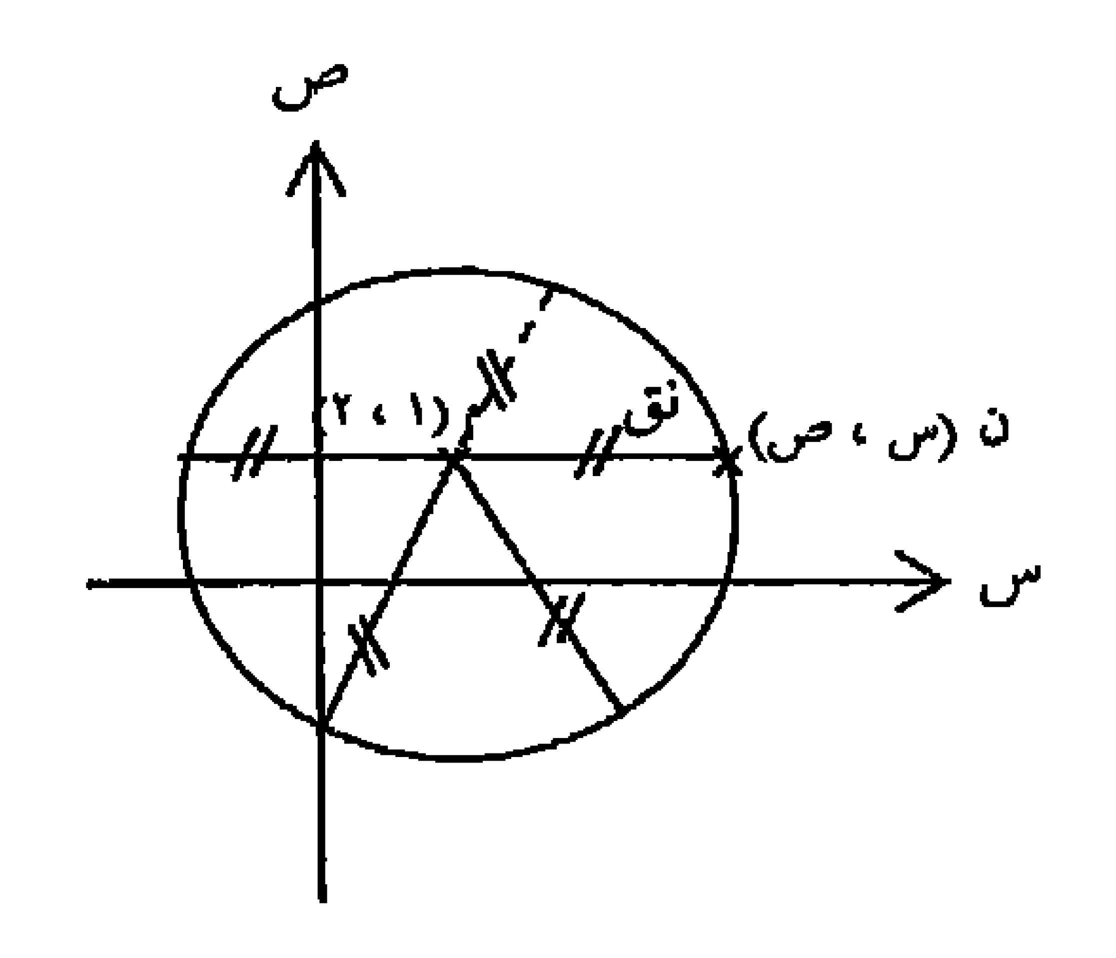
هو مسار (منحنى) ترسمه نقطة متحركة في المستوى تحت شروط معينة.

وهذه الشروط هي التي تنتج ما يسمى بمعادلة المحل الهندسي، وهي علاقة جبرية بين الاحداثيين السيني والصادي للنقطة المتحركة ن (س ، ص) كما في المثال:

مثال:

ما المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة والتي تبعد بعداً ثابتاً مقداره نق عن النقطة م (١ ، ٢) ؟

الحل:



وصف المحل الهندسي، تتحرك النقطة ن (س ، ص) بحيث أن يكون بعدها عن م (١ ، ٢) دائماً = نق، ان مسار هذه النقطة المتحركة هو محيط دائرة كما في الشكل.

أما معادلة الحل الهندسي فينتج من استخدام قانون المسافة بين نقطتين هكذا:

ن م = نق = $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

∴ $\sqrt{(\text{س} - 1)^2 + (\text{ص} - 2)^2} = \text{نق}^2$

$(\text{س} - 1)^2 + (\text{ص} - 2)^2 = \text{نق}^2$ انها الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

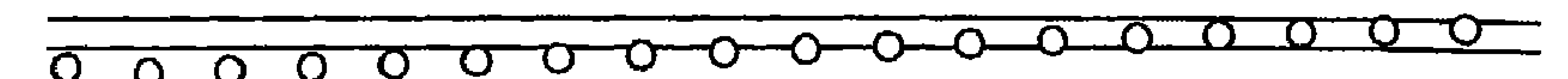
ولكن من المعلوم أن الدائرة تقطع مخروطي ينتج عملياً (هندسياً) من قطع مستوى س لمخروطين ملتقيان بالرأس كما في الشكل عندما يكون المستوى عامودياً على المحور ولا يمر بالرأس المشترك.

رأس مشترك
دائرة
المحور

وهكذا فإن منحنيات جميع القطوع المخروطية (مكافئ، ناقص –الدائرة حالة خاصة– الزائد) تنتج من نقطة متحركة بشروط معينة (محل هندسي) لذا فإنني للسهولة والتبسيط سأحصر مناقشة هذه القطوع في هذه البنود:

(٢٣ - ٢) القطع المكافئ Parabola:

القطع المكافئ مجموعة من النقط تقع جميعها في مستوى واحد على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة ب تسمى البؤرة Focus ومن خط مستقيم معين ل يسمى الدليل Directrix الواقعين في المستوى نفسه.



أما بلغة المحل الهندسي، فالقطع المكافئ هو مسار (منحنى) لنقطة متحركة مثل ن (س، ص) والتي يكون بعدها أثناء حركتها عن نقطة ثابتة مثل ب (البؤرة) يساوي دائماً بعدها عن مستقيم معلوم مثل ل (الدليل)

حيث ن ب = ن د

الشرط الأساسي تحركة النقطة



ن (س، ص) كما هو وضاح في الشكل

والشكل المجاور يبين مكوناته وهي:

- الرأس م (٠ ، ٠) Vertex
- الدليل "ل" ومعادلته س = − جـ
- البؤرة ب (جـ ، ٠)
- المحور: مستقيم مار بالبؤرة والرأس معادلته ص = صفر (هنا محور السينات) كما هو واضح من الشكل، والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم المار بالبؤرة ب والعامودي على الدليل ل لذا يسمى محور التماثل، واختصار محور القطع المكافئ، وتسمى النقطة الواقعة في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل رأس القطع المكافئ م (٠، ٠) هنا بالشكل.

لذا فإن ب م = م هـ = جـ   حيث جـ دائماً موجبة.

جـ هي البعد بين البؤرة والرأس = البعد بين الرأس والدليل

وتسمى النسبة بين ب ن : ن د   بالاختلاف المركزي Eccentricity

وبما أن ب ن = ن د بالفرض من التعريف

فإن الاختلاف المركزي للقطع المكافئ = $\frac{\text{ب ن}}{\text{ن د}}$ = ١ دائماً

ويرمز له بالرمز هـ:

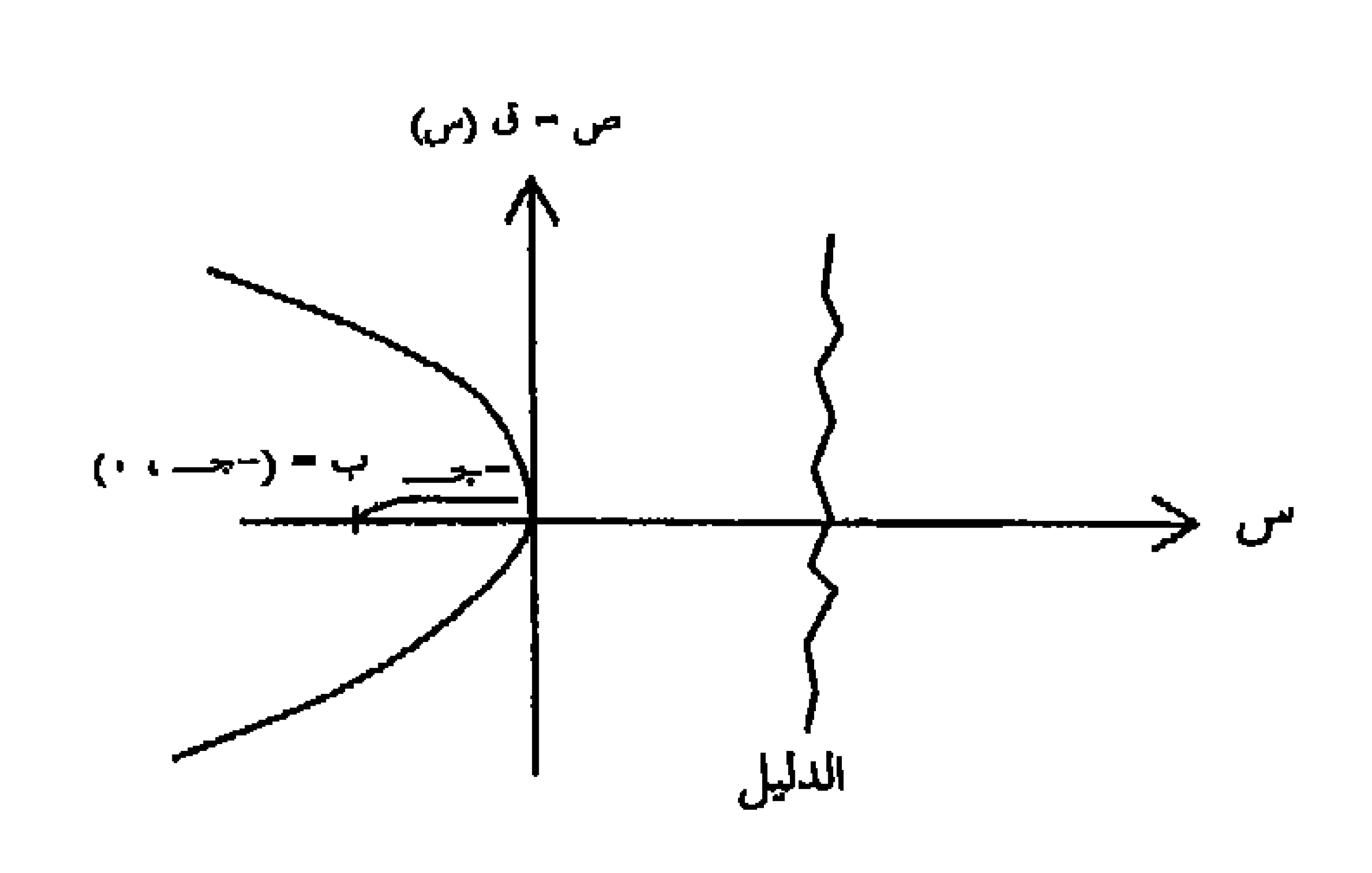
أي أن هـ = ١ ومن هنا نسمي القطع المكافئ بهذا الاسم كون اختلافه المركزي يكافئ الواحد الصحيح.

سندون الآن الصور القياسية Standard Position لمعادلة القطع المكافئ الذي

رأسه نقطة الأصل، أي م (٠ ، ٠)

ومحوره ينطبق على محور السينات

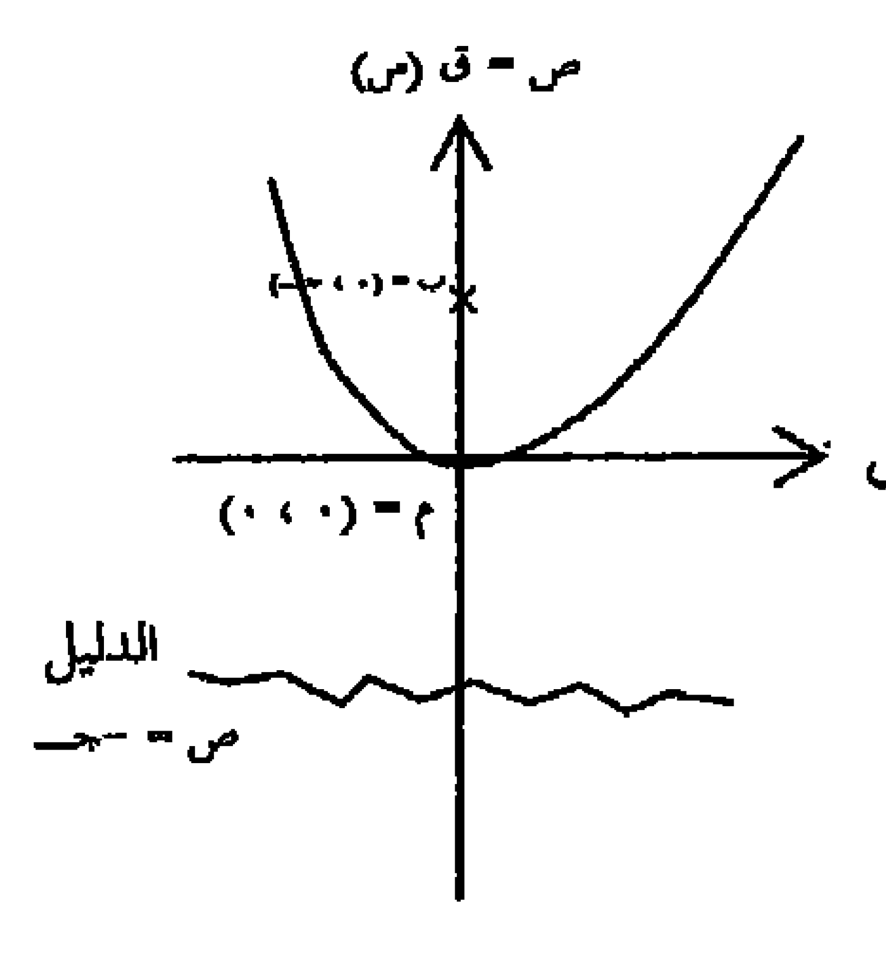
كما يلي:



ص^{٢} = ٤ س جـ ٠٠٠٠٠ (١)

والتفسير: الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل م (٠ ، ٠) ومفتوح لليمين، حيث النوع عكس التربيع.

ص^{٢} = - ٤ س جـ ٠٠٠٠ (٢)

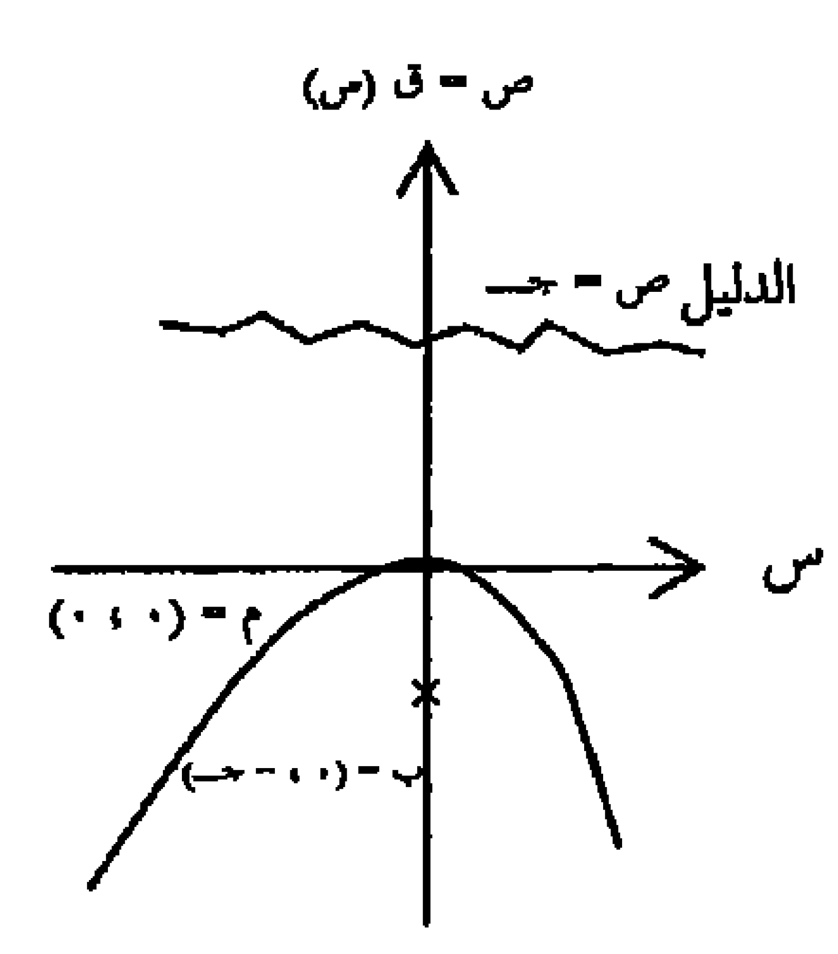


والتفسير: الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل م (٠ ، ٠) ومفتوح لليسار حيث النوع عكس التربيع س = جـ

وفي الحالتين يمكن أن يسمى القطع المكافي السيني هكذا:

ص^{٢} = ± ٤ جـ س ٠٠٠٠٠٠٠٠٠ (١ ، ٢) معاً.

س^{٢} = ٤ جـ ص ٠٠٠٠٠٠٠٠ (٣)



والتفسير: الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافي الذي رأسه نقطة الأصل م (٠ ، ٠) ومفتوح للأعلى النوع عكس التربيع.

س^{٢} = - ٤ جـ ص ٠٠٠٠٠٠ (٤)

ص = ق (س)

الدليل ص = جـ

س

م = (٠ ، ٠)

ب = (٠ ، -جـ)

والتفسير: الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافي الذي رأسه نقطة الأصل م (٠ ، ٠) ومفتوح للأسفل النوع عكس التربيع، وفي الحالتين يمكن أن يسمى القطع المكافئ الصادي هكذا:

س^{٢} = ± ٤ جـ ص

والأمثلة ستنحصر في اتجاهين متعاكسين:

الأول: تُعطى معادلة القطع المكافئ لإيجاد مكوناته.

الثاني: تعطى بعض مكوناته لإيجاد معادلته.

والرسم للتوضيح في الحالتين:

مثال:

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه م (٠ ، ٠) ومعادلة دليله ص = ٢ ثم ارسم منحناه.

بما أن معادلة دليله ص = ٢ فهو صادي مفتوح للأسفل كما في الرسم، لأن موقع البؤرة عكس اتجاه الدليل كما في الشكل.

معادلته القياسية س٢ = - ٤جـ ص

لكن جـ = ٢ لأن بعد البؤرة عن الرأس = بعد الرأس عن الدليل = جـ

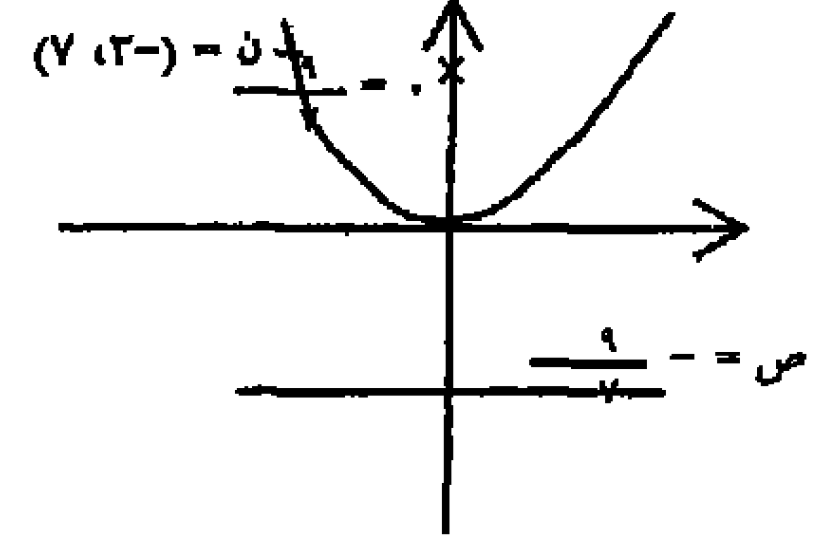
∴ س^{٢} = - ٤ (٢ ص) = - ٨ ص

المعادلة: س^{٢} = - ٨ ص

ومحوره هو محور الصادات، معادلته س = صفر

مثال:

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه م (٠ ، ٠) وفتحته للأعلى ويمر بالنقطة ن(- ٣ ، ٧) وجد بقية مكوناته.



حسب المعطيات فهو صادي مفتوح للأعلى

ومعادلته س^{٢} = ٤ جـ ص كما في الشكل

وبما أنه يمر بالنقطة فهي تحققه

$4=(-3)^2$ ∴ جـ (٧) ← ٩ = ٢٨ جـ ← جـ = $\frac{٩}{٢٨}$

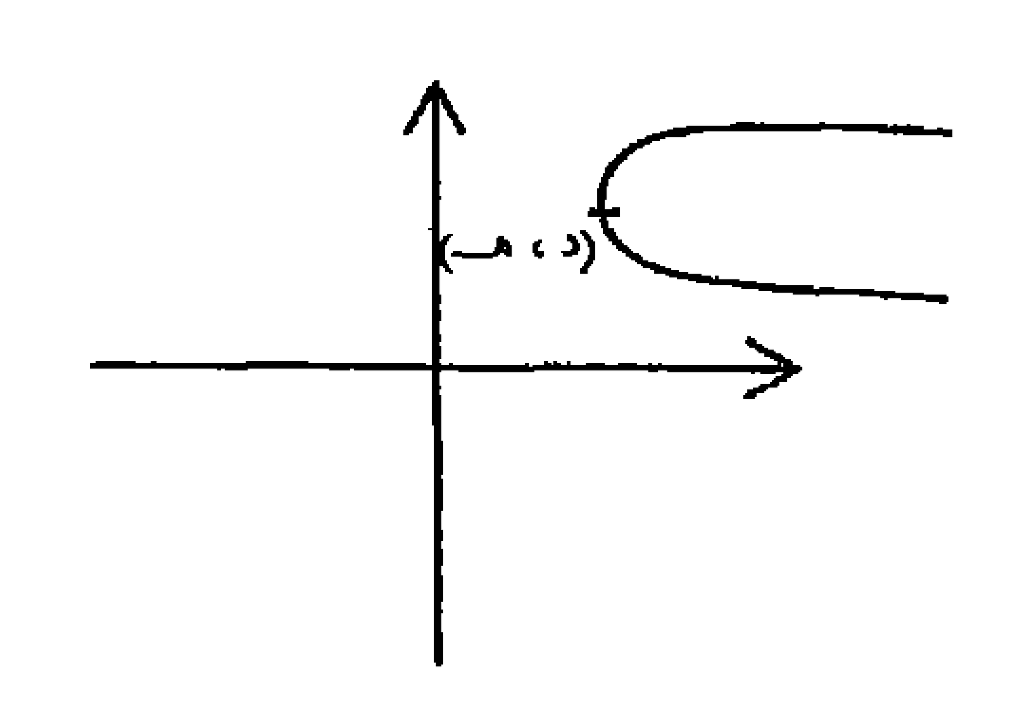
∴ المعادلة: $س^٢ = ٤ \left(\frac{٩}{٢٨}\right)$ ص ← $س^٢ = \frac{٩}{٧}$ ص

فمعادلة الدليل: ص = $-\frac{٩}{٧}$

ومحوره هو محور الصادات، ومعادلته س = ٠

والآن سنتعرف الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد المحورين الاحداثيين أو ينطبق على أحدهما، ورأسه النقطة (د ، هـ) بواسطة الانسحاب (تحويل هندسي) لليمين أو اليسار أو الأعلى أو الأسفل كما في الأشكال التالية:

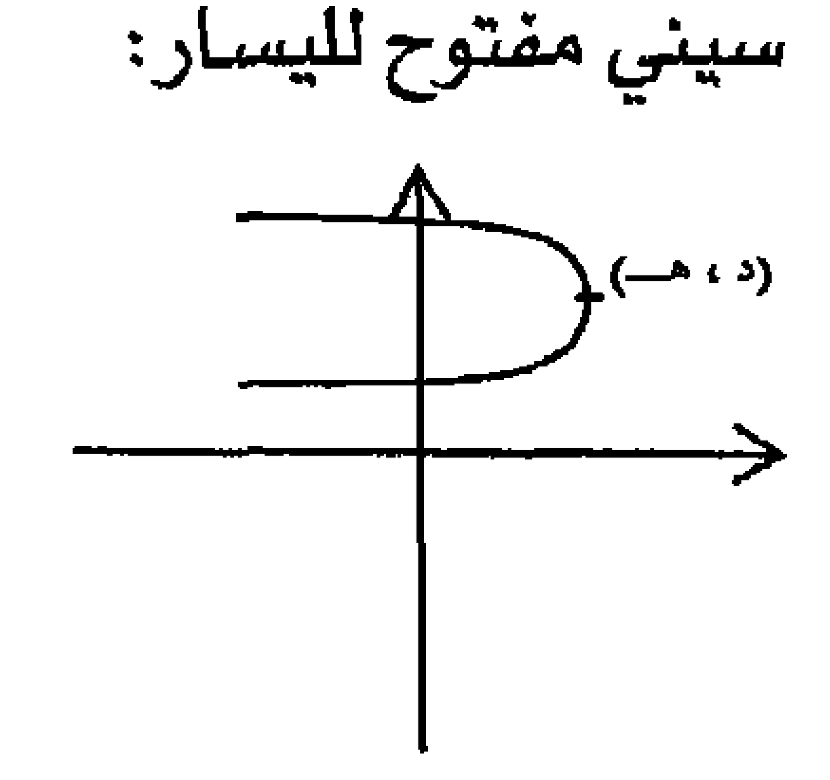
سيني مفتوح لليمين:



المعادلة: (النوع عكس التربيع)

$(ص - هـ)^٢ = ٤$ جـ (س - د)

سيني مفتوح لليسار:



المعادلة: (النوع عكس التربيع)

$(ص - هـ)^٢ = - ٤$ جـ (س - هـ)

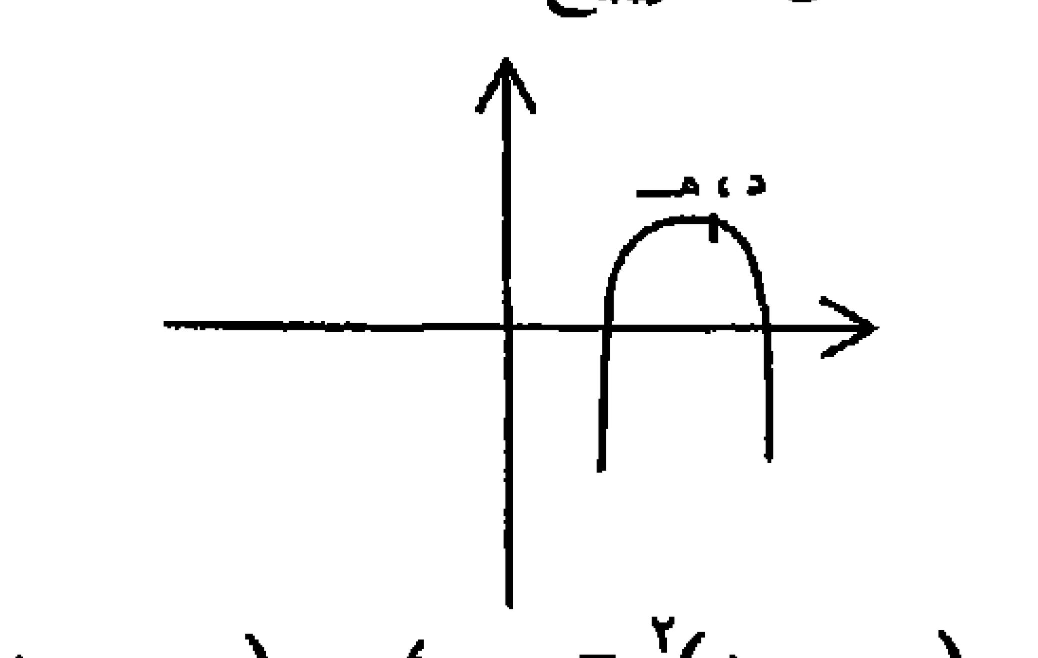
صادي مفتوح للأعلى:

(النوع عكس التربيع)

$(س - د)^٢ = ٤$ جـ (ص - هـ)

صادي مفتوح للأسفل:

(النوع عكس التربيع)



$(س - د)^٢ = - ٤$ جـ (ص - هـ)

ولمناقشة الأمثلة على القطع المكافئ، نستعين بالرسم ونجد احداثيات الرأس أولاً، ثم اتجاه الفتحة ثانياً لتساعدنا في الحل ثم نكمل بالتسلسل ونركز على ايجاد جـ = البعد بين الرأس والدليل = البعد بين البؤرة والرأس.

وحسب المخطط التالي:

احداثيات الرأس ⟵ اتجاه الفتحة والنوع ⟵ قيمة جـ ⟵ بقية الحل:

مثال:

عيّن مكونات القطع المكافئ الذي معادلته (ص + ١)^{٢} = ٤ (س - ٢) ثم ارسم منحناه.

"هنا الرسم مع الحل سوية"

من معادلته فهو سيني مفتوح لليمين، ولإيجاد رأسه:

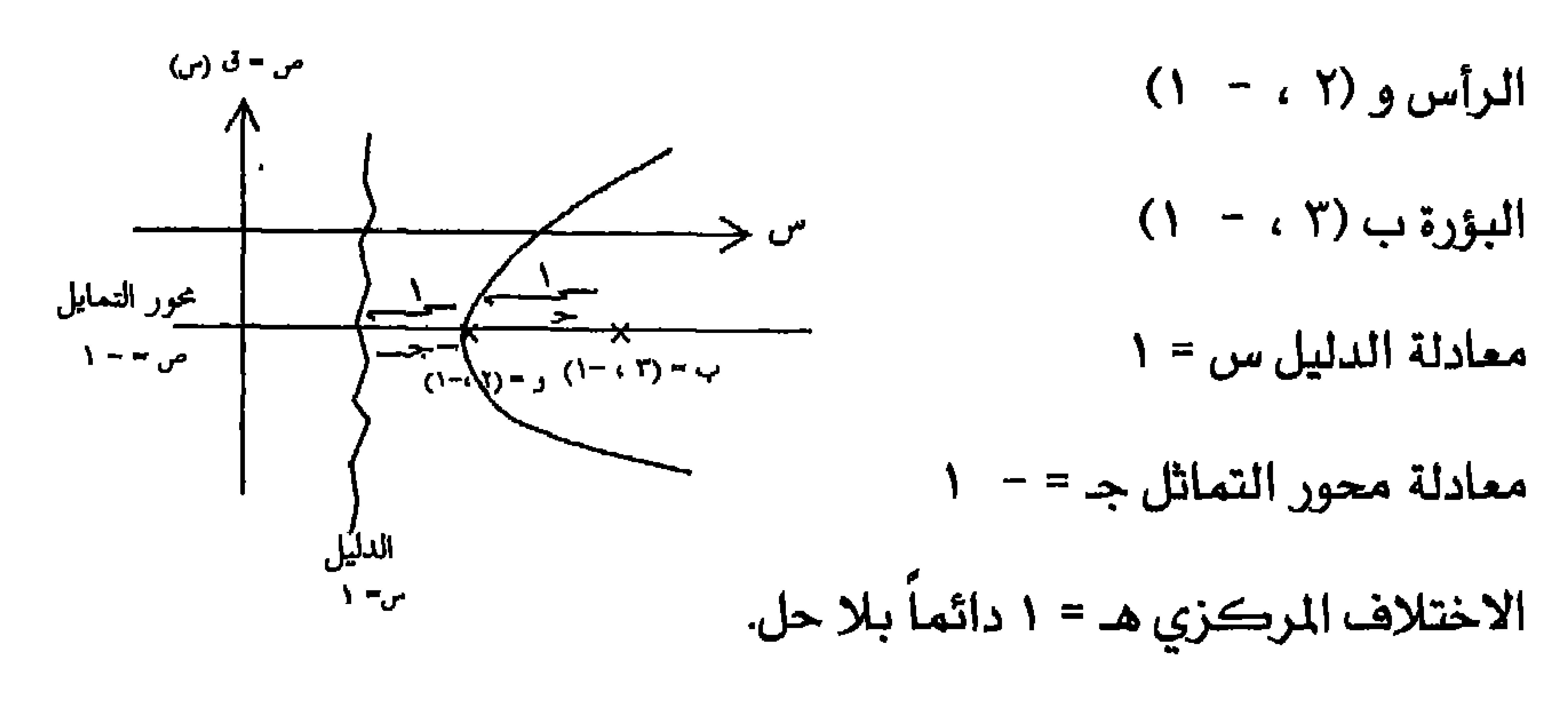
(ص + ١)^{٢} = ٤ (س - ٢) نطابقه مع المعادلة القياسية

(ص – هـ)^{٢} = ٤ جـ (س – د)

ومنها د = ٢ ، هـ = - ١ ∴ الرأس م (٢ ، - ١) ⟵ (١)

٤ جـ = ٤ ⟵ جـ = ١

وبقية المكونات نجدها من الرسم كما في الشكل



الرأس و (٢ ، - ١)

البؤرة ب (٣ ، - ١)

معادلة الدليل س = ١

معادلة محور التماثل جـ = - ١

الاختلاف المركزي هـ = ١ دائماً بلا حل.

بالإضافة الى أن للقطع المكافئ صور قياسية للمعادلة، فإن له صور عامة أيضاً.

× المعادلة العامة للقطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات أو ينطبق عليه في بعض الحالات:

ص = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ

ويسمى القطع الصادي (النوع عكس التربيع) فهو مفتوح للأعلى أو للأسفل حسب اشارة أ

يكون مفتوحاً للأسفل اذا كانت اشارة أ سالبة أي أ < صفر

ويكون مفتوحاً للأعلى اذا كانت اشارة أ موجبة أي أ > صفر

ومعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات أو ينطبق عليه س = أ $ص^{٢}$ + ب ص + جـ ويسمى القطع السيني ويكون مفتوحاً لليمين عندما أ > صفر أي اشارة أ موجبة. ومفتوح لليسار عندما أ < صفر أي اشارة أ سالبة. علماً بأن أ ≠ صفر بأي حال من الأحوال.

وتحول الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الى الصورة القياسية لإيجاد مكوناته بواسطة اكمال المربع كما يلي:

مثال:

عيّن مكونات القطع المكافئ الذي معادلته العامة ٢ ص = $س^{٢}$ + ٨ س + ٢٢ وارسم منحناه.

نحوّل المعادلة الى الصورة القياسية بواسطة اكمال المربع هكذا:

$س^{٢}$ + ٨ س = ٢ ص − ٢٢

وباضافة مربع نصف معامل س الى الطرفين:

$س^٢ + ٨ س + (٤)^٢ = ٢ ص - ٢٢ + (٤)^٢$

ومنها $س^٢ + ٨ س + ٤^٢ = ٢ ص - ٢٢ + ١٦ = ٢ ص - ٦$

أي أن $(س + ٤)^٢ = ٢ (ص - ٣)$

وهذه الصورة القياسية لقطع مكافئ صادي مفتوح للأعلى

$(س + د)^٢ = ٤ جـ (ص - هـ)$

ومنها: د = - ٤ ، هـ = ٣

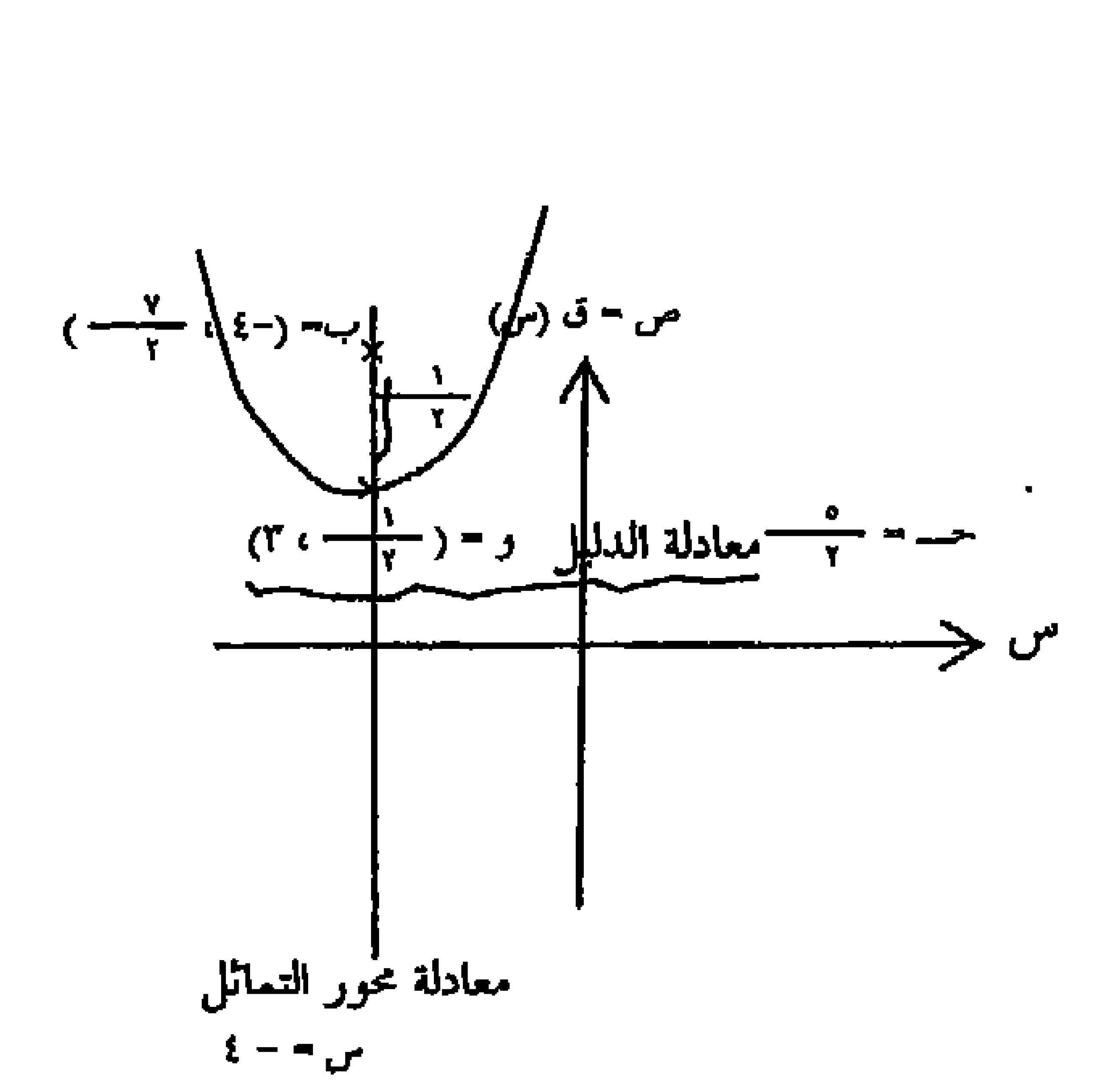
فاحداثيات الرأس و (- ٤ ، ٣)

$٤ جـ = ٢ \longrightarrow جـ = \frac{١}{٢}$

البؤرة ب $(- ٤ ، \frac{٧}{٢})$

معادلة محور التماثل: س = - ٤

معادلة الدليل $ص = \frac{٥}{٢}$.



ملحوظتان جديرتان بالاهتمام:

في هذا السياق هناك ارتباط بين القطوع المخروطية والاشتقاق كما يلي:

الملحوظة الأولى: وهي شقان:

الشق (i): يمكن ايجاد احداثيات رأس القطع المكافئ الصادي $ص = أ س^٢ + ب س + جـ$ فقط سواء أكان مفتوحاً للأعلى أو الأسفل بواسطة (التفاضل) أو الاشتقاق. إذ أن الرأس يُجدد قيمة قصوى عظمى كانت أم صغرى، لأن المماس عندها يوازي محور السينات حيث أنها نقطة حرجة كما في الشكل.

فاحداثيات رأس القطع المكافئ السابق

عظمى

صغرى

٢ ص = س^{٢} + ٨ س + ٢٢

نجد النقطة الحرجة بعد قسمة الطرفين على ٢

ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٤ س + ١١

$\frac{د ص}{د س}$ = س + ٤ = صفر ⟵ س = - ٤ الاحداثي السيني

ص = ق (- ٤) = $\frac{١}{٢}$ (- ٤)^{٢} + ٤ (- ٤) + ١١ = ٣ وهي صغرى كونه مفتوح لأعلى

∴ احداثيات الرأس و (- ٤ ، ٣) كما نتج من اكمال المربع أعلاه.

الشق (ii): وباستخدام الملحوظة (i) وبشكل عام فإن احداثيات رأس القطع المكافئ الصادي بالاشتقاق كما يلي:

ليكن: ص = ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

قَ (س) = ٢ أ س + ب

ومنها ٢ أ س$_{١}$ + ب = صفر ⟵ س$_{١}$ = - $\frac{ب}{٢ أ}$

ومنها ص = ق (- $\frac{ب}{٢ أ}$)

∴ احداثيات رأس القطع المكافئ ($\frac{-ب}{٢ أ}$ ، ق ($\frac{-ب}{٢ أ}$)) مباشرة

مثال:

ما احداثيات رأس القطع المكافئ ص = - س^{٢} – ٢ س – ٩

$\frac{د ص}{د س}$ = - ٢ س - ٢ = صفر ⟵ س = - ١ الاحداثي السيني

الاحداثي الصادي: ص = ق (- ١)= - (- ١)^{٢} - ٢ (- ١) - ٩

= - ١ + ٢ - ٩ = - ٨

∴ احداثيات رأس القطع المكافئ (- ١ ، - ٨)

الملحوظة الثانية:

لإيجاد معادلة مماس القطع المكافئ عند أي نقطة عليه ولبيان ارتباط القطوع المخروطية بالتفاضل مرة أخرى نجد:

$$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س = س_1} = م_{مماس} \text{ ثم المعادلة } ص - ص_1 = م_{مماس} (س - س_1)$$

مثال:

أوجد معادلة المماس والعامودي عليه للقطع المكافئ $ص = \frac{١}{٢} س^٢ + ٤ س + ١١$

عند النقطة أ (- ٢ ، ٥)

نعوّض النقطة لنرى هل تقع عليه أم لا هكذا:

$$ق(-٢) = \frac{١}{٢}(-٢)^٢ + ٤(-٢) + ١١ = ٥$$

∴ (- ٢ ، ٥) تقع عليه

$$\frac{د ص}{د س} = س + ٤ \longrightarrow م_{مماس} = -٢ + ٤ = ٢$$

معادلة المماس:

$ص - ٥ = ٢ (س - ٢) \longrightarrow ص = ٢ س + ٩$ معادلة المماس

$$م_{العامودي} = \frac{-١}{م_{مماس}} = \frac{-١}{٢}$$

معادلة العامودي:

$ص - ٥ = -\frac{١}{٢} (س - ٢) \longrightarrow ص = -\frac{١}{٢} س + ٤$ معادلة العامودي

مثال:

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه و (- ١ ، - ١) ومعادلة دليله ص = ١ وارسم منحناه

نبدأ بالرسم:

بما أن البؤرة باتجاه معاكس للدليل فهو

صادي مفتوح للأسفل، ومعادلته القياسية

(س – د)^{٢} = – ٤ جـ (ص – هـ)

ونجد: جـ = البعد بين الدليل والرأس = ١ – (– ١) = ٢

احداثيات البؤرة ب (– ١ ، – ٣)

معادلته القياسية:

(س – ١)^{٢} = – ٤ (٢) (ص – ١)

(س + ١)^{٢} = – ٨ (ص + ١) الصورة القياسية

وبعد فك الأقواس تتحول المعادلة الى الصورة العامة هكذا:

س^{٢} + ٢ س + ١ = – ٨ ص – ٨

ومنها – ٨ ص – ٨ = س^{٢} + ٢ س + ١. اعادة الترتيب

ومنها $\frac{-٨}{-٨}$ ص = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٩}{-٨}$

ص = – $\frac{١}{٨}$ س^{٢} – $\frac{٢}{٨}$ س – $\frac{٩}{٨}$

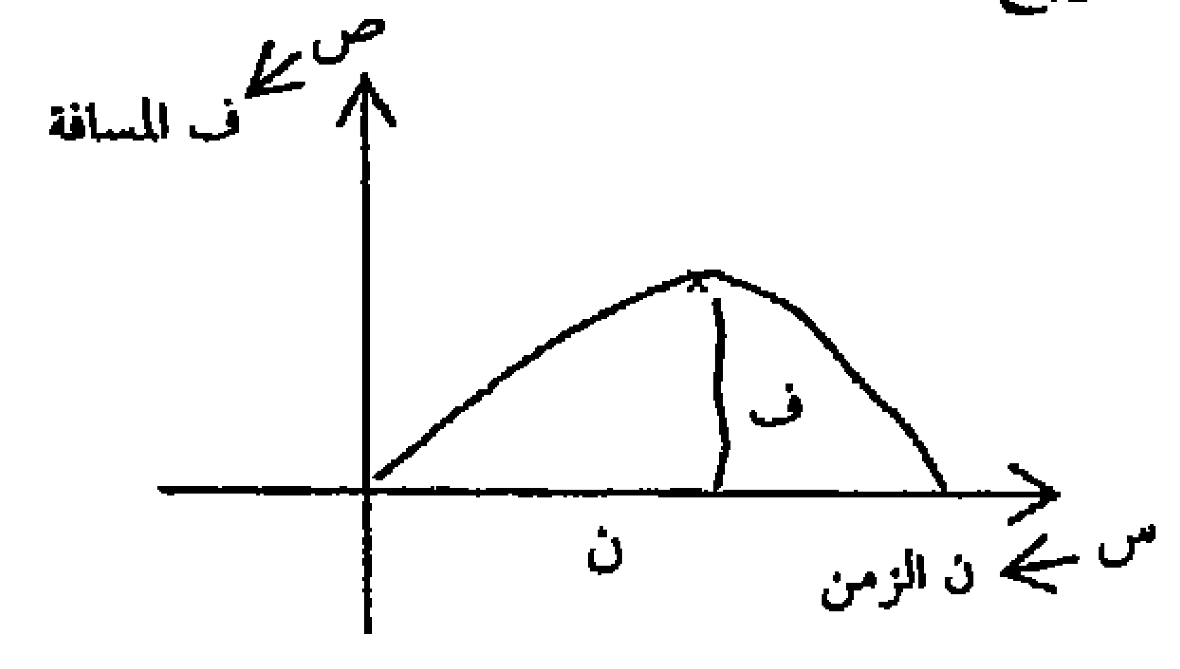
وللتحقق فإنه صادي مفتوح للأسفل لأن $-\frac{١}{٨} <$ صفر، اشارة أ سالبة كما مرّ سابقاً

مثال تطبيقي:

قذف جسيم رأسياً لأعلى حسب العلاقة ف = ٢٠ ن – ٥ ن^{٢} حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار. احسب أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم باستخدام تعريف القطع المكافئ ثم باستخدام التفاضل وعن طريقة المشتقة الأولى.

بالقطوع المخروطة:

نجد احداثيات القطع المكافئ باكمال المربع هكذا:



- (- ٥ ن^{٢} + ٢٠ ن = ف)

$$\frac{٥}{٥} ن^{٢} - \frac{٢٠}{٥} ن = \frac{- ف}{٥}$$

$$ن^{٢} - ٤ ن = - \frac{١}{٥} ف$$

باضافة مربع نصف معامل ن (كونه صادي)

$$ن^{٢} - ٤ ن + ٢^{٢} = - \frac{١}{٥} ف + ٤$$

$$(ن - ٢)^{٢} = - \frac{١}{٥} (ف - ٢٠)$$

∴ احداثيات الرأس و (٢ ، ٢٠)

أي بعد ٢ ثانية، وأقصى ارتفاع = ٢٠ متر

بالاشتقاق: من الشكل قيمة قصوى ← عظمى

فَ = صفر لإيجاد النقطة الحرجة

فَ = ٢٠ − ١٠ ن = صفر ← ن = ٢ ثانية

العظمى = ف (٢) = ٢٠ (٢) - ٥ (٢)^{٢} = ٤٠ - ٢٠ = ٢٠ متر أقصى ارتفاع.

أو كتطبيقات فيزيائية:

ع = فَ = ٢٠ − ١٠ ن = صفر السرعة = صفر

ومنها ن = ٢ ثم ف = ٢٠ م أقصى ارتفاع

مثال:

تتحرك نقطة و (س ، ص) على منحنى بحيث يُحدد موضعها في اللحظة ن، (ن ≥ صفر) بالمعادلتين التاليتين:

س = جتا ٢ ن ، ص = جتا ن:

أوجد معادلة المنحنى الذي تسير عليه النقطة ونوعه.

نربط ص بـ س هكذا:

جتا ٢ ن = ٢ جتا^{٢} ن − ١

س = ٢ ص^{٢} − ١ ⟵

$$\frac{٢}{٢}\,ص^{٢} = \frac{س + ١}{٢}$$

$$ص^{٢} = \frac{١}{٢}\,(س + ١)$$ معادلة المنحنى

قطع مكافئ سيني مفتوح للأعلى.

=

(٢٣ − ٣) القطع الناقص Ellipse:

القطع الناقص مجموعة من النقط تقع في مستوى واحد ويكون مجموع بعديها عند نقطتين ثابتتين هما ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ تسميان البؤرتين مقداراً ثابتاً يساوي ٢ أ وهو طول المحور الأكبر للقطع والواقعان في المستوى نفسه.

وأما بلغة الحل الهندسي: فالقطع الناقص هو مسار نقطة متحركة ن (س ، ص) بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ (تسميان البؤرتين) مقداراً ثابتاً هو ٢ أ = طول المحور الأكبر ر رَ كما في الشكل. فمكونات القطع الناقص هي:


(i) محورين للتماثل هما:

المستقيم المار بالبؤرتين ويسمى المحور الأكبر ر رَ = ٢ أ

والمستقيم العامودي على المستقيم الواصل بين البؤرتين $ب_1$ ، $ب_2$ والمنطبق على ط طَ ويسمى المحور الأصغر ط طَ = ٢ ب

(ii) البؤرتان $ب_1$ (جـ ، ٠) ، $ب_2$ (- جـ ، ٠) حيث جـ هي البعد بين احدى البؤرتين والمركز Center م (٠ ، ٠) حالياً.

ويسمى الطول $ب_1$ $ب_2$ البعد البؤري Focal Dimension ويساوي ٢ جـ.

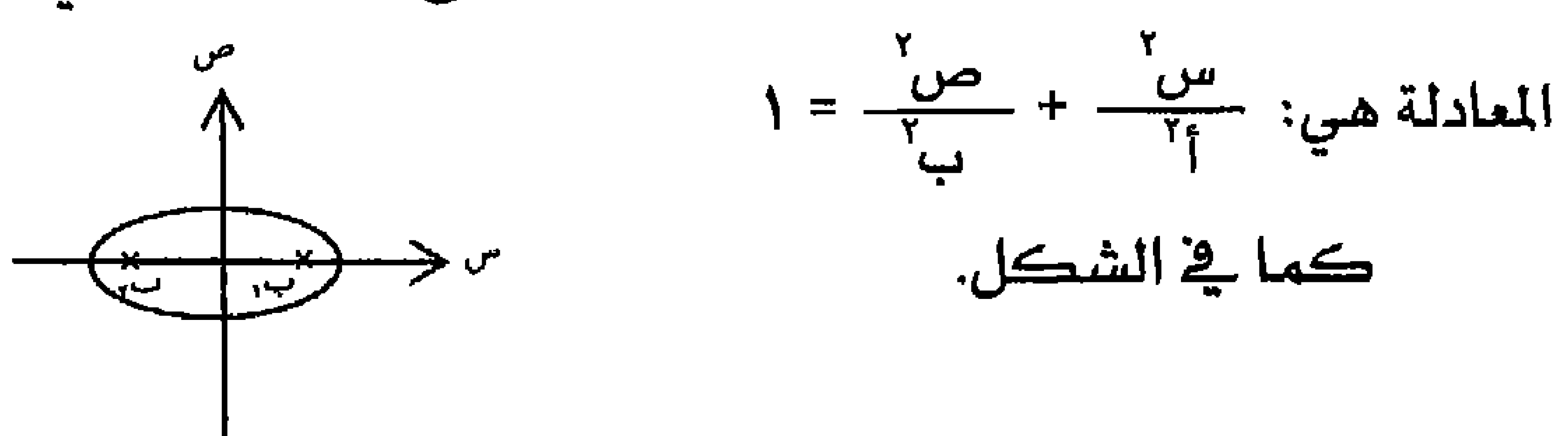
(iii) الرأسان ر ، رَ حيث تسمى النقطة مركز المحور الأكبر، وطولها ٢ أ وتسمى النقطة ط طَ المحور الأصغر وطولها ٢ ب

وأما معادلة القطع الناقص بالصورة القياسية فهي اثنتان هما:

المعادلة الأولى: مركزه م (٠ ، ٠) نقطة الأصل، ومحوره الأكبر منطبق على محور السينات وطوله ٢ أ ويسمى القطع الناقص السيني.

المعادلة هي: $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

كما في الشكل.



المعادلة الثانية: مركزه م (٠ ، ٠) نقطة الأصل ومحوره الأكبر منطبق على محور الصادات وطوله ٢ أ ويسمى القطع الناقص الصادي.

المعادلة هي: $\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = 1$

كما في الشكل.

حيث ٢أ المحور الأكبر Major Axis المار بالبؤرتين وهو المهم هنا ٢ ب المحور الأصغر Minor Axis.

فاسم القطع الناقص السيني أو الصادي مأخوذ من المقام، فإذا كان مقام $س^2$ هو $أ^2$ فهو سيني، وإذا كان مقام $ص^2$ هو $أ^2$ فهو صادي، حيث ٢ أ هو المحور الأكبر المار بالبؤرتين.

وهناك الاختلاف المركزي Eccentricity ويُعرف بأنه النسبة بين جـ ، أ ويرمز له بالرمز: $هـ = \frac{جـ}{أ}$ حيث جـ < أ دائماً. لذا فإن هـ < ١ أيضاً. ولهذا السبب سُمي بالناقص لأن هـ يقل أو ينقص عن الواحد الصحيح.

فمكونات القطع الناقص وبإيجاز شديد:

مركز م (٠ ، ٠) وبؤرتين $ب_١$ (جـ ، ٠) ، $ب_٢$ (- جـ ، ٠) اذا كان سيني

أو $ب_١$ (٠ ، جـ) ، $ب_٢$ (٠ ، - جـ) اذا كان صادي

ومحورين ٢ أ الأكبر ، ٢ ب الأصغر، واختلاف مركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} < ١$

ثم لا تنسى أن $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$ ، جـ = البعد بين المركز واحد البؤرتين.

مثال:

عيّن مكونات القطع الناقص $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٢} = ١$ وارسم منحناه.

بما أن مقام $س^٢$ (أ) > مقام $ص^٢$ (ب) فالقطع سيني.

والصورة القياسية لمعادلته $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$

ومنها $أ^٢ = ٩ \longrightarrow أ = ٣$

$ب^٢ = ٢$ ، $ب = \sqrt{٢}$

لكن $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$جـ^٢ = ٩ - ٢ = ٧$

$جـ = \sqrt{٧}$ دائماً موجبة

فالمركز م (٠، ٠)

والبؤرتان $ب_١ (\sqrt{٧} ، ٠)$ ، $ب_٢ (-\sqrt{٧} ، ٠)$

والمحور الأكبر ٢ أ = ٢ × ٣ = ٦ وحدات وهو منطبق على محور السينات ومعادلته ص = صفر والمحور الأصغر = ٢ ب = ٢ × $\sqrt{٢}$ = ٢$\sqrt{٢}$ وحدة وهو منطبق على محور الصادات ومعادلته س = صفر

والاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٧}}{٣} < ١$

لأن $\sqrt{٧} < ٣$ كما هو معلوم

مثال:

أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره الأصغر = ٤ ومحوره الأكبر على محور الصادات والمسافة بين البؤرتين ٢$\sqrt{٥}$ ، ٠

بما أن محوره الأكبر على محور الصادات فهو صادي معادلته القياسية:

$$\frac{س^٢}{ب^٢} + \frac{ص^٢}{أ^٢} = ١$$

لكن ٢ ب = ٤ ⟵ ب = ٢ ⟵ ب^٢ = ٤

البعد البؤري = ٢ جـ = ٢$\sqrt{٥}$ ⟵ جـ = $\sqrt{٥}$

لكن جـ^٢ = أ^٢ − ب^٢

$(\sqrt{٥})^٢$ = أ^٢ − ٤ ⟵ ٥ = أ^٢ − ٤

أ^٢ = ٩

فالمعادلة: $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

واختلافه المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٥}}{٣} < ١$

لأن $\sqrt{٥} < ٣$ كما هو معلوم.

وتعميماً لمعادلتي القطع الناقص السابقتين بواسطة الانسحاب حيث:

المركز م (٠ ، ٠) $\xrightarrow{\text{الانسحاب}}$ المركز و (د ، هـ) هما:

السيني $\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$

معادلة القطع الناقص السيني الذي مركزه م (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور السينات أو ينطبق عليه وطوله ٢ أ ومعادلته ص = هـ ومحوره الأصغر يوازي محور الصادات أو ينطبق عليه ومعادلته س = د

وكذلك الصادي: $\frac{(س - د)^2}{ب^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} = 1$

معادلة القطع الناقص الصادي الذي مركزه م (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور الصادات أو ينطبق عليه وطوله ٢ أ ومعادلته س = هـ ومحوره الأصغر يوازي محور السينات أو ينطبق عليه وطوله ٢ ب ومعادلته ص = هـ

ملحوظة لا بد منها في هذا السياق:

فعند ايجاد مكونات القطع الناقص أو رسم منحناه يجب الاستعانة بالرسم مع الحل جنباً الى جنب، ثم نبدأ بإيجاد جـ = البعد بين المركز واحدى البؤرتين وكأننا نجد أ ، ب ثم الرسم معاً.

مثال:

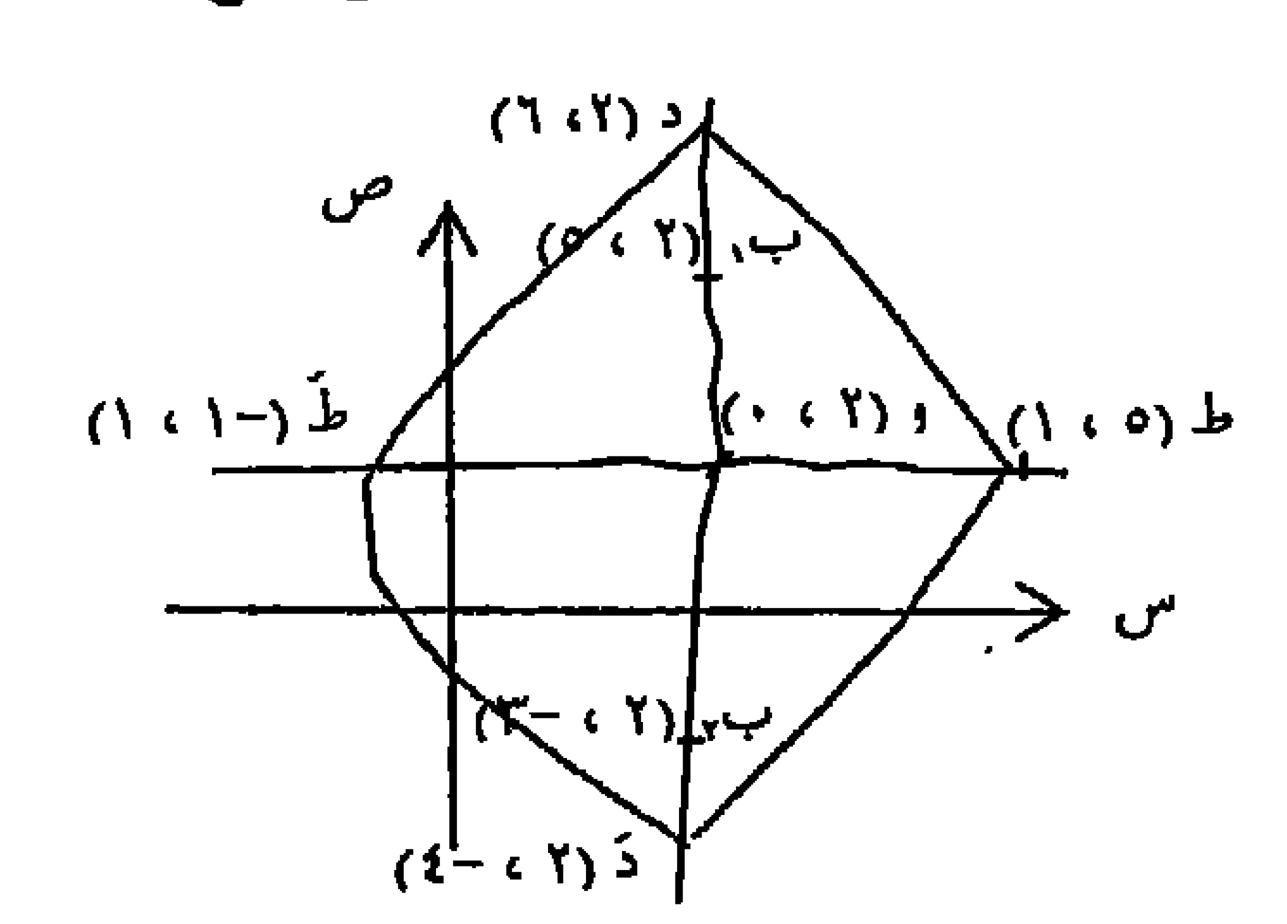
عيّن مكونات أو عناصر القطع الناقص:

$\frac{(س - ٢)^2}{٩} + \frac{(ص - ١)^2}{٢٥} = ١$ وارسم منحناه أيضاً.

بما أن مقام (ص - ١)^2 > مقام (س - ٢)^2 فهو صادي.

مركزه و(ص - ١)^2 ومعادلته القياسية

$\frac{(س - د)^2}{ب^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} = ١$



أي أن $أ^٢$ = ٢٥ ⟵ أ = ٥

$ب^٢$ = ٩ ⟵ ب = ٣

$جـ^٢$ = ٢٥ - ٩ = ١٦

جـ = ٤

طول المحور الأكبر ٢ أ = ٢ (٥) = ١٠ ومعادلته س = ٢

طول المحور الأصغر ٢ ب = ٢ (٣) = ٦ ومعادلته ص = ١

مثال:

ما معادلة القطع الناقص الذي مركزه و (- ٣ ، ٠) واحدى بؤرتيه (- ٣ ، - ٢) وطول محور الأكبر = ٦ وحدات؟

المعلومات المعطاة والرسم الموضح جانباً يقولان بأنه صادي

ومعادلته القياسية:

$$\frac{(س - ٢)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - ١)^٢}{أ^٢} = ١$$

جـ = صفر - (- ٢) = ٢ البعد بين المركز واحدى البؤرتين

فبؤرته الثانية $ب_٢$ (٣ ، ٢)

٢ أ = ٦ ⟵ أ = ٣

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$(٢)^٢ = (٣)^٢ - ب^٢$

$ب^٢ = ٥$

فالمعادلة: $\frac{(س + ٣)^٢}{٥} + \frac{(ص - ٠)^٢}{٩} = ١$

ومنها: نجد المعادلة العامة هكذا:

بعد فك الأقواس وترتيب الحدود:

٩ س^{٢} + ٦ ص^{٢} + ٥٤ س + ٨١ − ٤٥ = صفر

أي أن معادلته العامة:

٩ س^{٢} + ٦ ص^{٢} + ٥٤ س + ٣٦ = صفر

مثال:

أوجد مركز وبؤرتي القطع الناقص الذي معادلته العامة:

١٦ س^{٢} + ٩ ص^{٢} + ٦٤ س − ١٨ ص − ٧١ = صفر

بواسطة اكمال المربعين وبالنسبة للمتغيرين نحول الصورة العامة الى قياسية هكذا:

(١٦ س^{٢} + ٦٤ س) + (٩ ص^{٢} − ١٨ ص) = ٧١

باخراج ١٦ من الأول و ٩ من الثاني هكذا:

١٦ (س^{٢} + ٤ س) + ٩ (ص^{٢} − ٢ ص) = ٧١

باضافة مربع نصف معامل المتغير لكل من المتغيرين الى طرفي المعادلة:

١٦ (س^{٢} + ٤ س + ٢^{٢}) + ٩ (ص^{٢} − ٢ ص + ١^{٢}) = ٧١ + ١٦ (٢^{٢}) + ٩ (١^{٢})

١٦ (س + ٢)^{٢} + ٩ (ص − ١)^{٢} = ٧١ + ٦٤ + ٩

١٦ (س + ٢)^{٢} + ٩ (ص − ١)^{٢} = ١٤٤

―――――――――――

١٤٤

$$\frac{(\text{س} + ٢)^{٢}}{٩} + \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{١٦} = ١$$

المركز و (د ، هـ) = (− ٢ ، ١)

لكن $\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}$ ⟵ $\text{جـ} = \sqrt{١٦ - ٩} = \sqrt{٧}$

البؤرتان $\text{ب}_{١}$ $(-٢ \text{ ، } ١ + \sqrt{٧})$ ، $\text{ب}_{٢}$ $(-٢ \text{ ، } ١ - \sqrt{٧})$

الاختلاف المركزي $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{٧}}{٣} < ١$

كون $\sqrt{٧} < ٣$

مثال:

أوجد قيم ك ليكون المستقيم ٢ س + ص = ك مماساً

للقطع الناقص $٤ \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٨$ ثم أوجد نقط التماس.

"ارشاد" $\text{م}_{\text{مماس}} = \text{م}_{\text{المنحنى}}$

$\text{م}_{\text{مماس}}$: ٢ س + ص = ك

ص = − ٢ س + ك

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -٢$ ——— (١) $\text{م}_{\text{مماس}}$

$\text{م}_{\text{المنحنى}}$: $٤ \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٨$

$\text{ص}^{٢} = -٤ \text{س}^{٢} + ٨$

$\text{ص} = \sqrt{-٤ \text{س}^{٢} + ٨}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٨ \text{س}}{٢\sqrt{-٤ \text{س}^{٢} + ٨}}$ ——— (٢) $\text{م}_{\text{المنحنى}}$

أي أن $\frac{-٨ \text{س}}{٢\sqrt{-٤ \text{س}^{٢} + ٨}} = \frac{-٢}{١}$

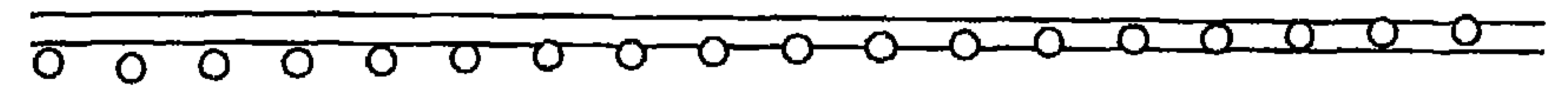
$\frac{-٨ \text{س}}{-٤} = \frac{-٤}{-٤}\sqrt{-٤ \text{س}^{٢} + ٨}$

$|٢ \text{س} = \sqrt{-٤ \text{س}^{٢} + ٨})^{٢}$

$٤ (\pm ١)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٨$

$٤ + \text{ص}^{٢} = ٨$

$\text{ص}^{٢} = ٤$



$٤ س^٢ = - ٤ س^٢ + ٨$

$٨ س^٢ = ٨$

$س = \pm ١$

$ص = \pm ٢$

نقط التماس:

$أ_١ (١ ، ٢)$ ، $أ_٢ (- ١ ، - ٢)$

ومنها ٢ س + ص = ك

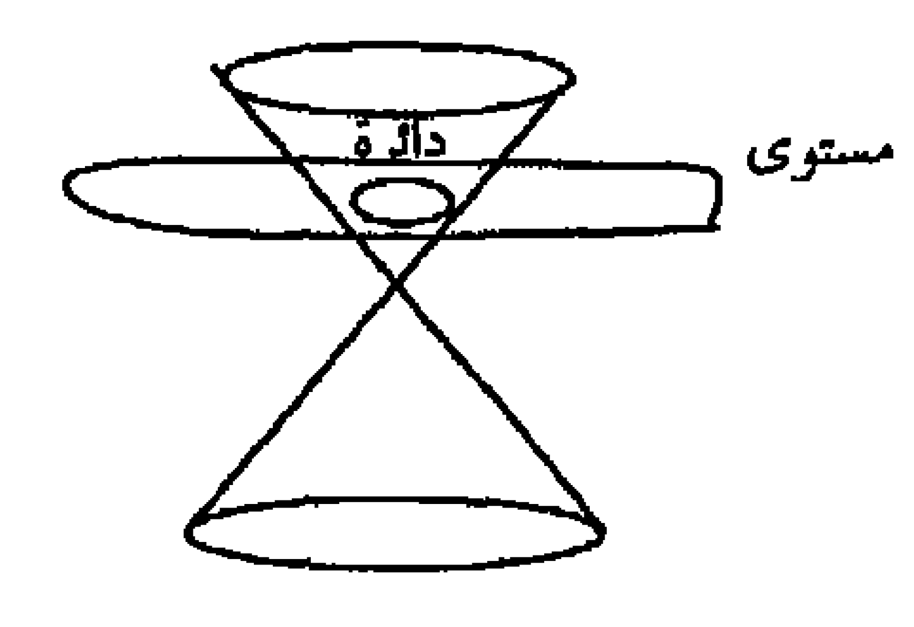
$٢ (\pm ١) + (\pm ٢) = ك$

ومنها ك = ٢ + ٢ = ٤

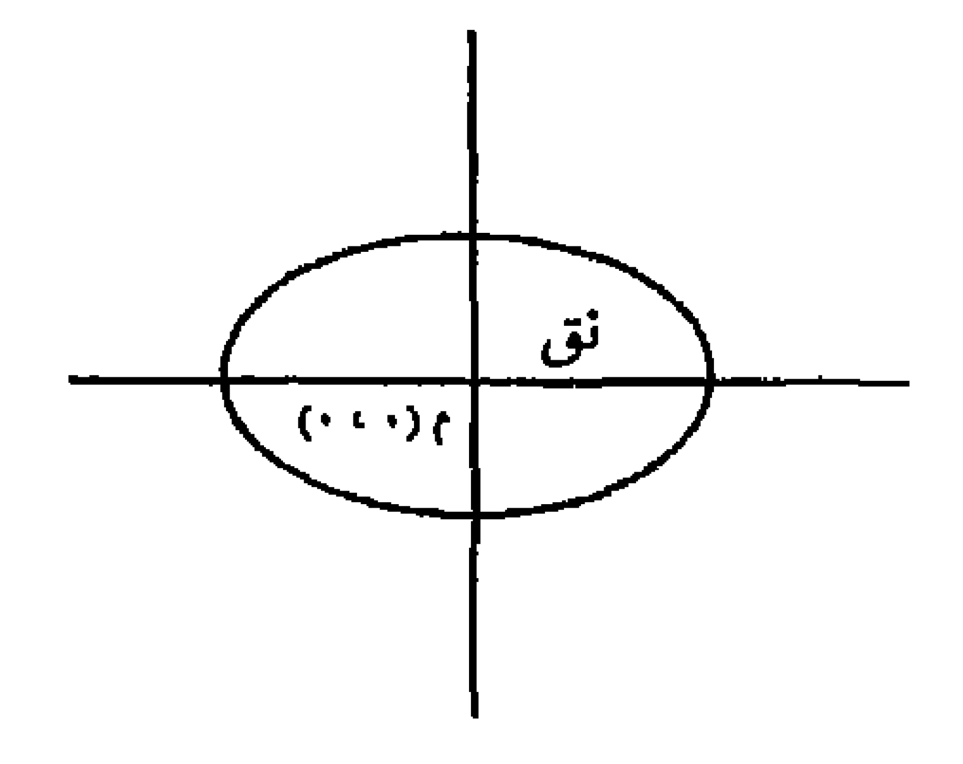
أو - ٢ - ٢ = - ٤

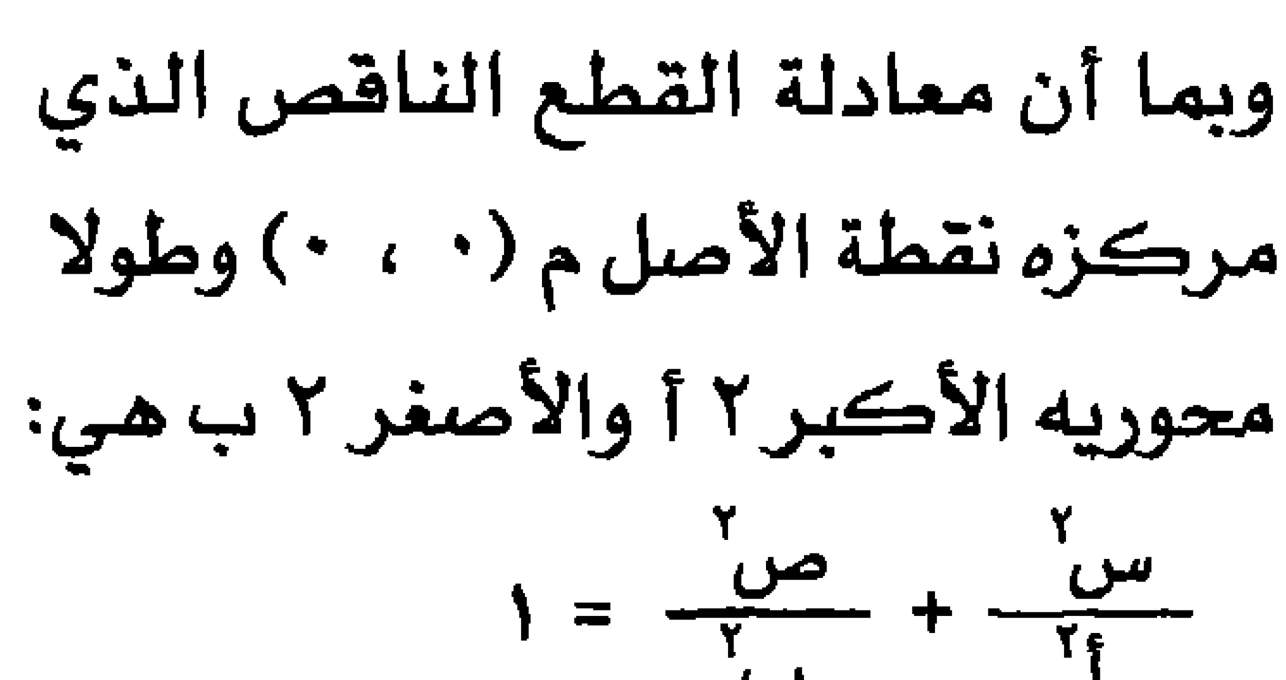
الدائرة Circle:

أما الدائرة: فهي حالة خاصة للقطع الناقص، فهندسياً تتكون الدائرة عندما يقطع مستوى مخروطاً مزدوجاً ويكون عامودياً على محور التماثل وغير مائل كما في الشكل.



أما جبرياً: فكأنها قطع ناقص تساوت فيه أطوال المحورين الأكبر والأصغر، فأصبحا بذلك أقطاراً فيها. كما في الشكل.





وبما أن معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل م (٠ ، ٠) وطولا محوريه الأكبر ٢ أ والأصغر ٢ ب هي:

$$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$$

وحيث أن أ = ب = نق (نصف قطر الدائرة)

$$فإن \left(\frac{س^٢}{نق^٢} + \frac{ص^٢}{نق^٢} = ١\right) (نق^٢)$$

أي س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢} معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل م (٠ ، ٠) ونصف قطرها نق وحدة.

وعندما يصبح مركز الدائرة أي نقطة في المستوى مثل و (د ، هـ) فإن معادلتها تصبح:

(س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

وهذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة.

وبعد فك الأقواس:

س^{٢} - ٢ س د + د^{٢} + ص^{٢} – ٢هـ ص + هـ^{٢} = نق^{٢}

أي أن س^{٢} + ص^{٢} - ٢ د س ، - ٢ هـ ص + د^{٢} + هـ^{٢} – نق^{٢} = صفر

المعادلة العامة للدائرة

ويمكن ايجاد معادلة الدائرة كما يلي:

مثال:

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م (٢ ، - ٣) ونصف قطرها ٤ سم

(س - ٢)^{٢} + (ص - -٣)^{٢} = ٤^{٢} الصورة القياسية

س^{٢} – ٤ س + ٤ + ص^{٢} + ٦ ص + ٩ - ١٦ = صفر

س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٦ ص + ١٣ - ١٦ = صفر

س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٦ ص – ٣ = صفر

الصورة العامة للمعادلة أو المعادلة العامة.

كما يمكن ايجاد مركز الدائرة ونصف قطرها، وذلك بتحويل الصورة العامة للدائرة الى الصورة القياسية بواسطة كمال المربعين كما يلي:

مثال:

ما احداثيات مركز الدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص + ٩ =$ صفر وما طول نصف قطرها؟

يتم تحويل الصورة العامة الى القياسية هكذا:

$(س^2 - ٦ س) + (ص^2 + ٨ ص) = - ٩$

باضافة مربع نصف معامل كل من المتغيرين الى طرفي المعادلة:

$(س^2 - ٦ س + ٣^2) + (ص^2 + ٨ ص + ٤^2) = - ٩ + ٣^2 + ٤^2$

$(س - ٣)^2 + (ص + ٤)^2 = ١٦$

$(س - ٣)^2 + (ص - ^-٤)^2 = ١٦$

ومنها م (د ، هـ) = م (٣ ، - ٤) احداثيات المركز

$نق^2 = ١٦ \longrightarrow نق = ٤$ سم

مثال:

النقطة ن (س ، ص) تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث أن:

س = ٢ + ٣ جا هـ ، ص = ٥ + ٣ جتا هـ حيث هـ زاوية متغيرة. بيّن أن النقطة ن تتحرك على محيط دائرة وأوجد نصف قطرها.

لنحاول ربط س مع ص من المعطيات

بما أن س = ٢ + ٣ جا هـ ⟵ فإن ٣ جا هـ = س − ٢

وان $جا هـ = \frac{س - ٢}{٣}$

وكذلك ٣ جتا هـ = ص - ٥

وان $جتا هـ = \frac{ص - ٥}{٣}$

لكن $جا^2 هـ + جتا^2 هـ = 1$ متطابقة دائرية مستورة

اذن: $\left(\frac{س - 2}{3}\right)^2 + \left(\frac{ص - 5}{3}\right)^2 = 1$

وبفك الأقواس:

$9 + \left(\frac{س^2 - 4س + 4}{9} + \frac{ص^2 - 10ص + 25}{9}\right) = 1$

$س^2 - 4س + 4 + ص^2 - 10ص + 25 = 9$

أي أن: $س^2 + ص^2 - 4س - 10ص + 29 - 9 = صفر$

$س^2 + ص^2 - 4س - 10ص + 20 = صفر$ معادلة الدائرة

ولإيجاد نصف قطرها نحولها الى الصورة القياسية بواسطة اكمال المربعين هكذا:

$(س^2 - 4س) + (ص^2 - 10ص) = -20$

باضافة مربع نصف معامل كل من المتغيرين الى طرفي المعادلة:

$(س^2 - 4س + 2^2) + (ص^2 - 10ص + 5^2) = -20 + 2^2 + 5^2$

$(س - 2)^2 + (ص - 5)^2 = -20 + 4 + 25$

$(س - 2)^2 + (ص - 5)^2 = 9$

ومنها $نق^2 = 9$

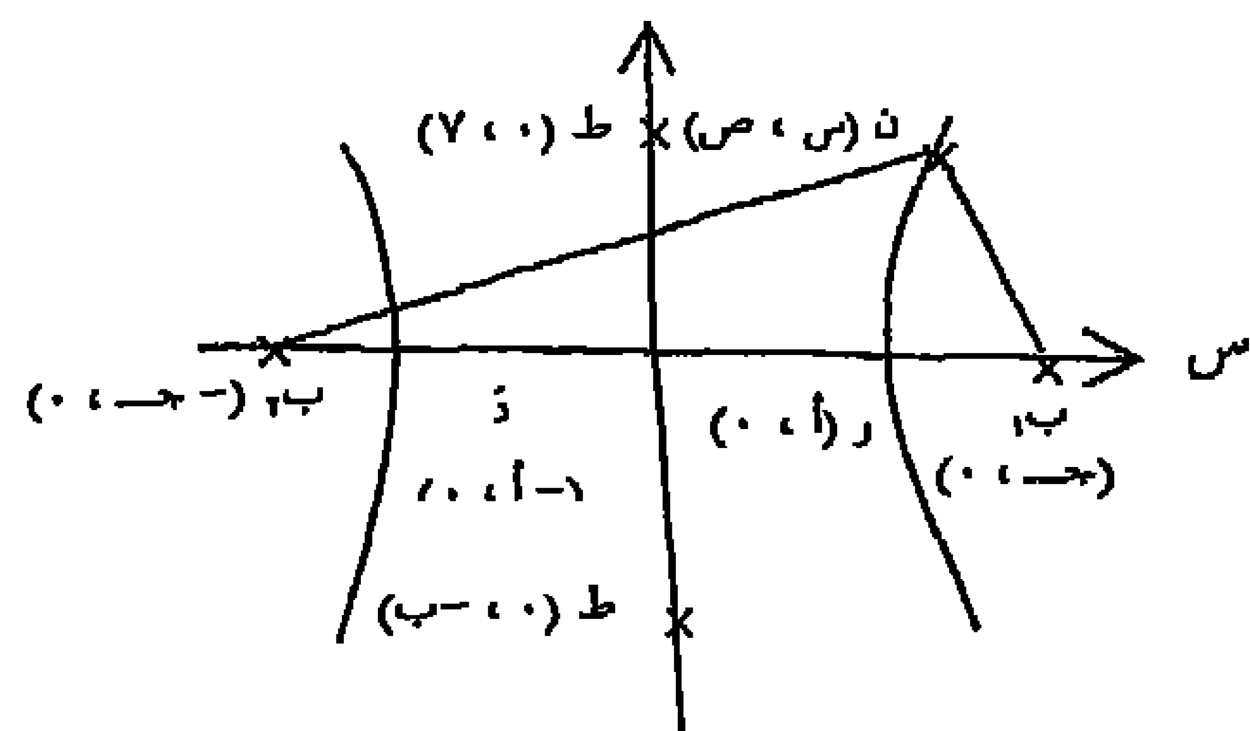
ومنها: نق = ٣ سم نصف قطر الدائرة.

(٢٣ - ٤) القطع الزائد Hyperbola:

والقطع الزائد مجموعة من النقط الواقعة في مستوى واحد ويكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان البؤرتين $ب_1$ ، $ب_2$ مقداراً ثابتاً يساوي ٢ أ طول المحور القاطع Transverse Axis الذي يمر بالبؤرتين الواقعتين في المستوى نفسه كما في الشكل.

وأما بلغة المحل الهندسي:

فالقطع الزائد هو المحل الهندسي كنقطة متحركة ن (س ، ص) بحيث يكون الفرق بين بعديها عن البؤرتين $ب_1$ ، $ب_2$ مقداراً ثابتاً = ٢ أ طول المحور القاطع. كما في الشكل ومنه وبالرموز:



| ن $ب_2$ − ن $ب_1$ | = ٢ أ   وأما معادلتا القطع الزائد القياسيتان عندما مركزه نقطة الأصل.

ان معادلة القطع الزائد السيني (محوره القاطع منطبق على محور السينات ومركزه نقطة الأصل) هي:

$$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1 \qquad \text{حيث اشارة س}^2 \text{ موجبة}$$

وأما معادلة القطع الزائد الصادي (محوره منطبق على محور الصادات ومركزه نقطة الأصل) هي:

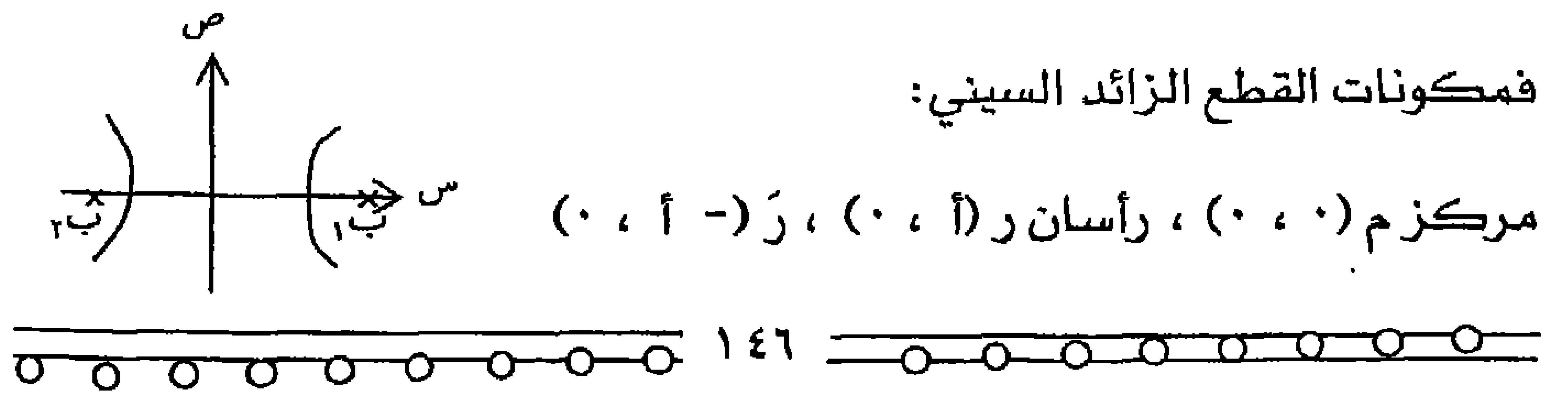
$$\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = 1 \qquad \text{حيث اشارة ص}^2 \text{ موجبة}$$

وبغض النظر عن قيمتي أ ، ب اطلاقاً.

والاختلاف المركزي هـ = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ > ١ لأن جـ > أ دائماً

"لهذا السبب س زائد كون هـ يزيد على الواحد الصحيح"

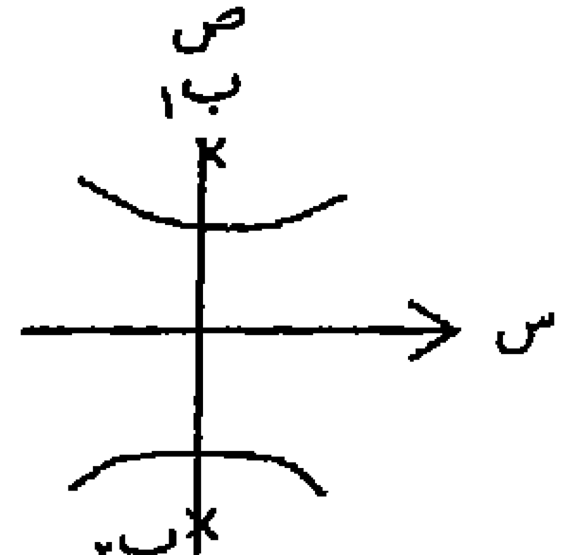
حسب العلاقة: $\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 + \text{ب}^2$ حيث جـ البعد بين مركزه واحدى بؤرتيه.



فمكونات القطع الزائد السيني:

مركز م (٠ ، ٠) ، رأسان ر (أ ، ٠) ، رَ (− أ ، ٠)

بؤرتان $ب_1$ (جـ ، ٠) ، $ب_2$ (− جـ ، ٠) محور قاطع المار بالبؤرتين ومحور مرافق غير المار بالبؤرتين.



وعندما يكون صادي فالرأسان ر(٠ ، أ) ، رَ(٠ ، − أ)

والبؤرتان $ب_1$ (٠ ، جـ) ، $ب_2$ (٠ ، − جـ)

مثال:

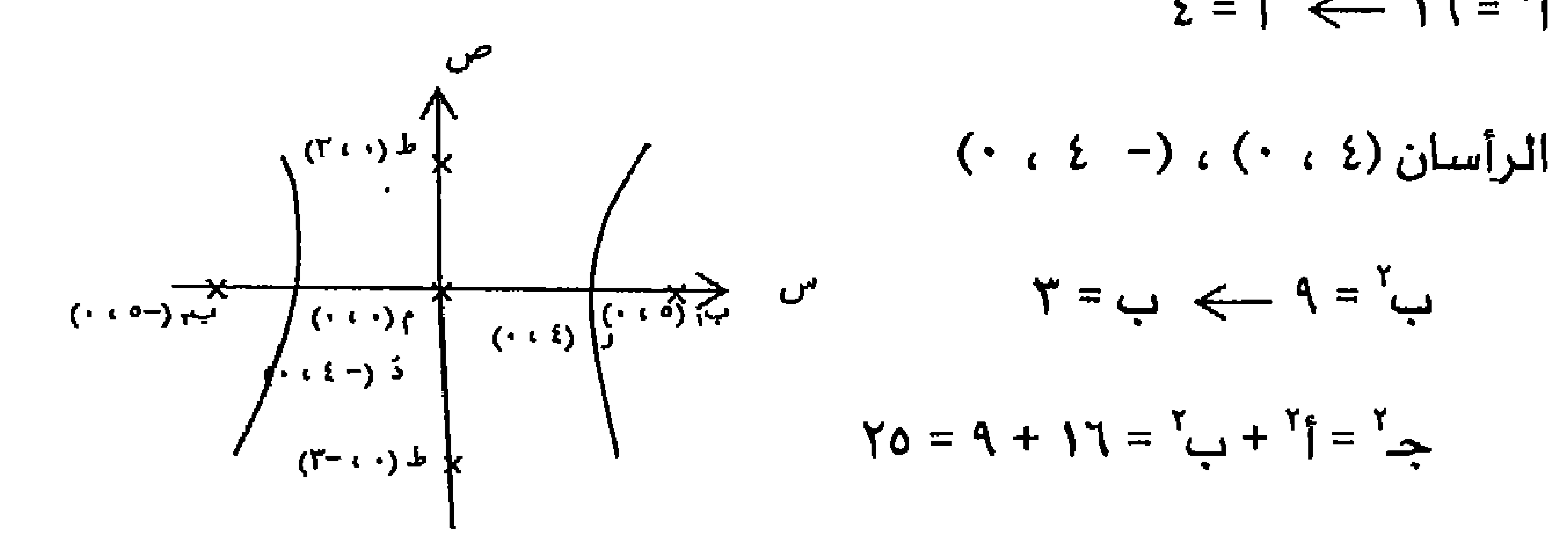
أوجد مكونات القطع الزائد ٩ $س^2$ − ١٦ $ص^2$ = ١٤٤

$\frac{٩س^2}{١٤٤} - \frac{١٦ص^2}{١٤٤} = \frac{١٤٤}{١٤٤}$ بالقسمة على ١٤٤ لجعل الطرف الأيسر "١" صحيح

$\frac{س^2}{١٦} - \frac{ص^2}{٩} = ١$ فهو سيني كون اشارة $س^2$ موجبة ،

ومركزه نقطة الأصل.

$أ^2 = ١٦ \leftarrow أ = ٤$



الرأسان (٤ ، ٠) ، (− ٤ ، ٠)

$ب^2 = ٩ \leftarrow ب = ٣$

$جـ^2 = أ^2 + ب^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥$

$جـ = \sqrt{٢٥} \pm ٥$

البؤرتان $ب_1$ (٥ ، ٠) ، $ب_2$ (− ٥ ، ٠)

طول المحور القاطع ٢ (٤) = ٨

طول محوره المرافق ٢ (٣) = ٦

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٤} > ١$ دائماً.

مثال:

أوجد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره القاطع ٤ وحدات، وبؤرتاه (٠، $\pm\sqrt{8}$)

الرسم يقول بأنه صادي،

ومعادلته القياسية:

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$

ومنها ٢ أ = ٤ ⟵ أ = ٢

رأساه (٠ ، ٢) ، (٠ ، − ٢)

$$جـ^2 = \sqrt{8} = 8$$

لكن $جـ^2 = أ^2 + ب^2$

$8 = 4 + ب^2 \longleftarrow ب = 2$

فالمعادلة: $\frac{ص^2}{4} - \frac{س^2}{4} = 1$

ولإيجاد معادلتي القطع الزائد القياسيتين والذي مركز كل منها و(د ، هـ) بواسطة الانسحاب م (− ٠ ، ٠) الى و (د ، هـ)

كما يلي:

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه و (د ، هـ) ومحوره القاطع يوازي محور السينات أو ينطبق عليه، وطوله ٢ أ ومعادلته ص = هـ

ومحوره المرافق يوازي أو ينطبق على محور الصادات ومعادلته س = د

هي السيني: $\frac{(س - د)^2}{أ^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1$

وبأسلوب مماثل فإن معادلة القطع الزائد:

الصادي: $\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} - \frac{(س - د)^2}{ب^2} = 1$

ملحوظتان:

الأولى: بالنسبة للقطوع المخروطية الثلاثة (مكافئ ، ناقص ، زائد) فإن جـ موجب دائماً، وللتمييز بين قيمة كل منها:

بالنسبة للقطع المكافئ ⟵ جـ = البعد بين الرأس والبؤرة

بالنسبة للقطع الناقص ⟵ جـ = البعد بين المركز واحدى البؤرتين

فهنا جـ < أ دائماً

بالنسبة للقطع الزائد ⟵ جـ = البعد بين المركز واحدى البؤرتين

فهنا جـ > أ دائماً

الثانية: الاختلاف المركزي هـ:

بالنسبة للقطع المكافئ هـ = ١ دائماً لأن ن ب = ن ك وهما متساويان بالفرق

بالنسبة للقطع الناقص هـ = $\frac{جـ}{أ}$ ولما كانت جـ < أ

فإن هـ < ١ دائماً

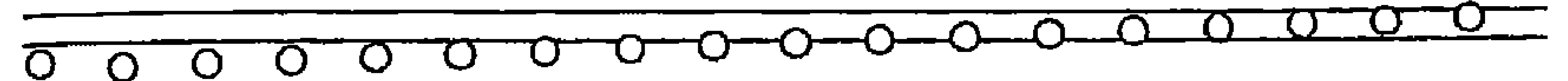
بالنسبة للقطع الزائد هـ = $\frac{جـ}{أ}$ ولما كانت جـ > أ

فإن هـ > ١ دائماً

مثال:

أوجد مكونات القطع الزائد $\frac{(ص - ٦)^٢}{٤} - \frac{(س - ٢)^٢}{١} = ١$ وارسم منحناه

انه صادي كون اشارة (ص - ٦)^٢ موجبة ومعادلته $\frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} - \frac{(س - د)^٢}{ب^٢}$ = ١ مركزه و (٢ ، ٦)





وضّح الرسم أكثر

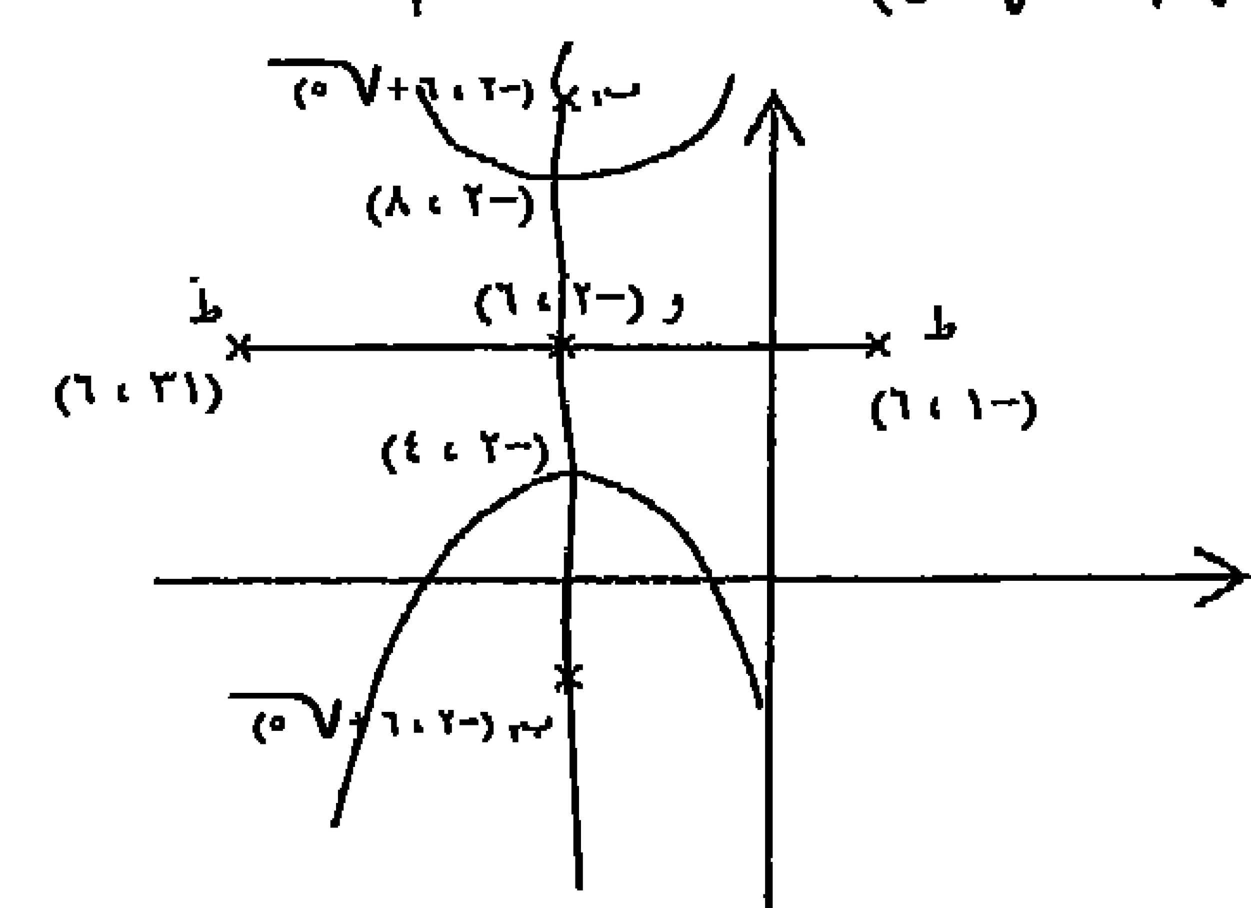
أ^٢ = ٤ ⟵ أ = ٢

ب^٢ = ١ ⟵ ب = ١

جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ٤ + ١ = ٥

جـ = √٥

بالبؤرتان (- ٢ ، ٦ + √٥) ، (- ٢ ، ٦ - √٥)



مثال:

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه و (٣ ، ١) واحدى بؤرتيه ب١ (٩ ، ٢) وطول محوره القاطع ٢ أ = ٨

الرسم يقول بأنه سيني

معادلته القياسية:

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$$

٢ أ = ٨ ، أ = ٤

لكن جـ = البعد بين المركز واحدى بؤرتيه = ٩ - ٣ = ٦

جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢

(٦)^٢ = ١٦ + ب^٢

ب^٢ = ٣٦ - ١٦ = ٢٠

ب = √٢٠ = ٢√٥



فالمعادلة:

$$\frac{(\text{س} - ٣)^{٢}}{١٦} - \frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{٢٠} = ١$$ الصورة القياسية

وأما الصورة العامة بعد التخلص من الكسر

٥ س^{٢} - ٤ ص^{٢} - ٣٠ س + ٨ ص - ٣٩ = صفر

والآن جاء وقت التمييز بين القطوع المخروطية بناء على معادلات منحنياتها العامة:

من المعلوم أن المعادلة: أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + د ص + هـ = صفر

معادلة تربيعية من الدرجة الثانية بمتغيرين حيث: أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية

و: أ ، ب لا يساويان الصفر معاً

فأما أ = صفر أو ب = صفر وليس الاثنان معاً وإلا أصبحت المعادلة أعلاه معادلة خط مستقيم جـ س + د ص + هـ = صفر

فعند استبدال الأعداد الثوابت (معاملات هنا) أ ، ب ، جـ ، د ، هـ بأعداد حقيقية فإن المعادلة أعلاه تصبح معادلة قطع مكافئ أو ناقص أو دائرة أو زائد وبيان ذلك بتحويل الصورة العامة الى قياسية بواسطة اكمال المربع أو المربعين.

مثال:

عيّن نوع القطع المخروطي الممثل بالمعادلة:

١٦ س^{٢} + ٩ ص^{٢} + ٦٤ س − ١٨ ص - ٧١ = صفر وارسم منحناه.

بواسطة اكمال المربعين بالنسبة للمتغيرين س ، ص كلاً على انفراد:

(١٦ س^{٢} + ٦٤ س) + (٩ ص^{٢} - ١٨ ص) = ٧١

وباخراج العامل المشترك ١٦ من الأول، ٩ من الثاني لتصبح س^{٢} ، ص^{٢} لهما معامل الوحدة هكذا:

١٦ (س^{٢} + ٤ س) + ٩ (ص^{٢} - ٢ ص) = ٧١

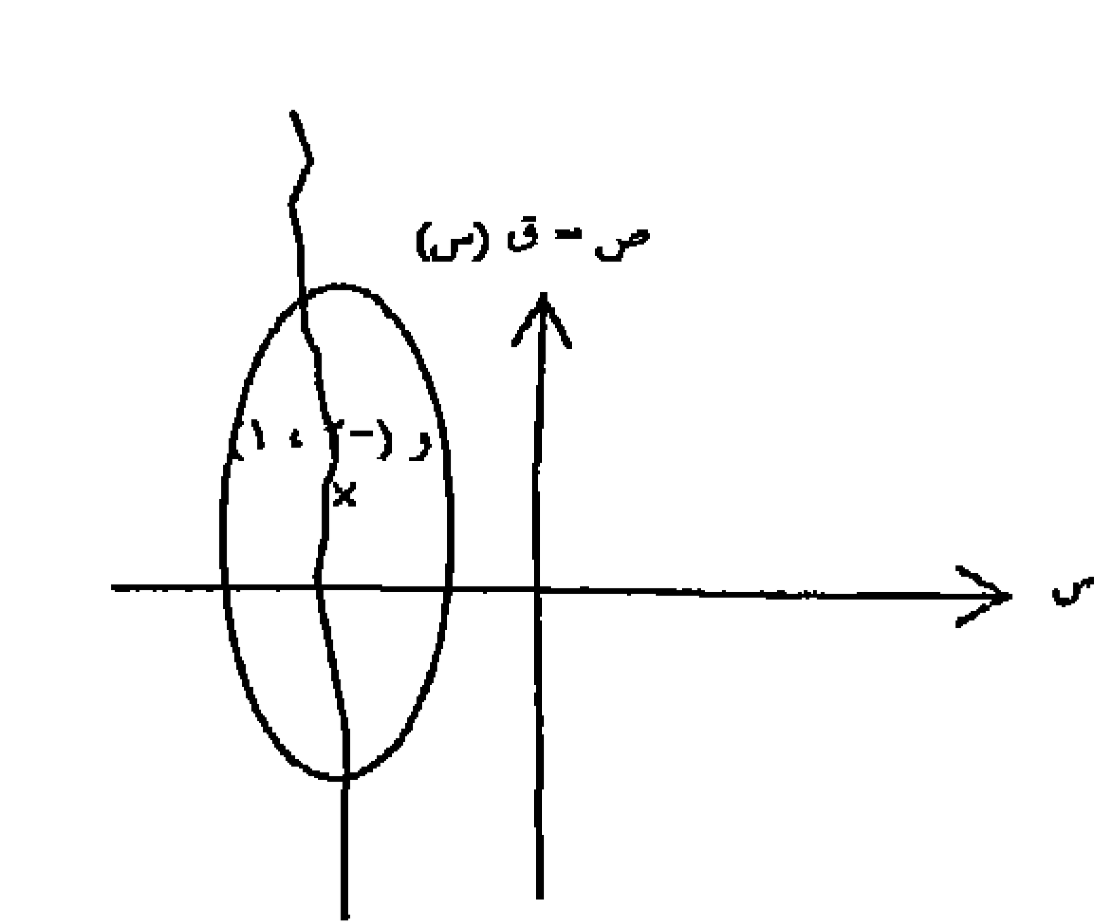
وباضافة مربع نصف معامل كل من المتغيرين س ، ص الى طرفي المعادلة كما يلي:

$$١٦ (س^٢ + ٤ س + ٢^٢) + ٩ (ص^٢ - ٢ ص + ١^٢) = ٧١ + ١٦ (٢^٢) + ٩ (١^٢)$$

$$١٦ (س + ٢)^٢ + ٩ (ص - ١)^٢ = ٧١ + ٦٤ + ٩$$

$$\frac{١٦ (س + ٢)^٢}{١٤٤} + \frac{١٩ (ص - ١)^٢}{١٤٤} = \frac{١٤٤}{١٤٤}$$

$$\therefore \frac{(س + ٢)^٢}{٩} + \frac{(ص - ١)^٢}{١٦} = ١$$



فالقطع ناقص ومركزه (− ٢ ، ١)

$$جـ = \sqrt{١٦ - ٩} = \sqrt{٧}$$

بؤرتاه: $ب_١ (- ٢ ، ١ + \sqrt{٧})$ ، $ب_٢ (- ٢ ، ١ - \sqrt{٧})$

واختلافه المركزي:

$$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{٧}}{٤} < ١ \quad لأن \sqrt{٧} < ٤$$

مثال:

عيّن نوع القطع المخروطي الممثل بالمعادلة:

$س^٢ + ٨ س + ٢٢ = ٢ ص$ وارسم منحناه.

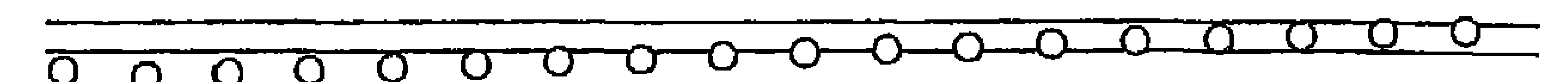
بواسطة اكمال المربع:

$$س^٢ + ٨ س = ٢ ص - ٢٢$$

باضافة مربع نصف معامل س

$$(س^٢ + ٨ س + ٤)^٢ = ٢ ص - ٢٢ + ٤^٢$$

$$(س + ٤)^٢ = ٢ ص - ٢٢ + ١٦$$



(س + ٤)^{٢} = ٢ ص − ٦

(س + ٤)^{٢} = ٢ (ص − ٣)

انه قطع مكافئ صادي مفتوح للأعلى.

رأسه و (− ٤ ، ٣)

معادلته القياسية:

(س + د)^{٢} = ٤ جـ (ص − هـ)

٤ جـ = ٢

جـ = $\frac{١}{٢}$

بؤرته (− ٤ ، ٣ + $\frac{١}{٢}$) = (− ٤ ، $\frac{٧}{٢}$)

مثال:

عيّن نوع القطع المخروطي الممثل معادلته:

٤ ص^{٢} − ٩ س^{٢} − ١٦ ص = صفر وارسم منحناه

(٤ ص^{٢} − ١٦ ص) − (٩ س^{٢} − ٠) = صفر

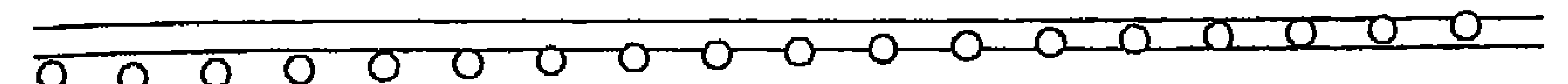
٤ (ص^{٢} − ٤ ص) − ٩ (س^{٢} − ٠) = صفر

باضافة مربع نصفْ معامل س ، ص للطرفين:

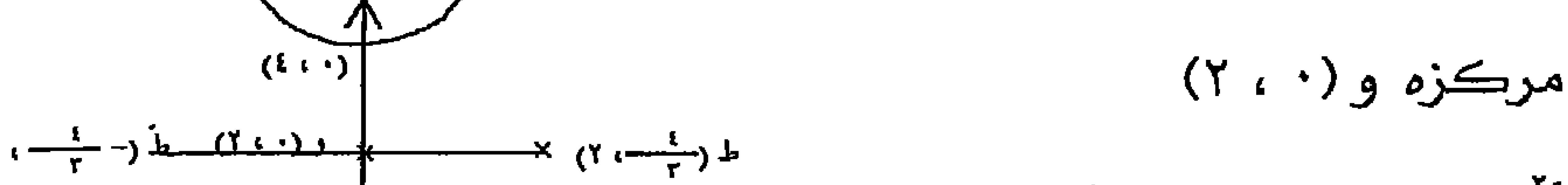
٤ (ص^{٢} − ٤ ص + ٢^{٢}) − ٩ (س)^{٢} = صفر + ٤ (٢^{٢}) لم نضف هنا شيئاً بالنسبة للمتغير س

$\frac{٤\ (ص - ٢)^{٢}}{١٦} - \frac{٩\ (س)^{٢}}{١٦} = \frac{١٦}{١٦}$ نجعل الطرف الأيسر وحدة واحدة:

$\frac{(ص - ٢)^{٢}}{٤} - \frac{(س - ٠)^{٢}}{\frac{١٦}{٩}} = ١$



انه قطع زائد صادي



مركزه و (٠ ، ٢)

$أ^{٢} = ٤ \longleftarrow أ = ٢$

$ب^{٢} = \frac{١٦}{٩} \longleftarrow ب = \frac{٤}{٣}$

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} = ٤ + \frac{١٦}{٩} = \frac{٣٦ + ١٦}{٩} = \frac{٥٢}{٩} \longleftarrow جـ = \frac{٢\sqrt{١٣}}{٣}$

بؤرتاه: $ب_{١} (٠ ، ٢ + \frac{٢\sqrt{١٣}}{٣})$ ، $ب_{٢} (٠ ، ٢ - \frac{٢\sqrt{١٣}}{٣})$

مثال:

عيّن نوع القطع المكافئ الممثل بالمعادلة:

$س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س - ٢ ص - ٥ = صفر$

باكمال المربع:

$(س^{٢} + ٦ س) + (ص^{٢} - ٢ ص) = ٥$

باضافة مربع نصف معامل س ، ص الى الطرفين:

$(س^{٢} + ٦ س + ٣^{٢}) + (ص^{٢} - ٢ ص + ١^{٢}) = ٥ + ٣^{٢} + ١^{٢}$

$(س + ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ٥ + ٩ + ١$

$(س + ٣)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ١٥$

أو $\frac{(س + ٣)^{٢}}{١٥} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{١٥} = ١$

فهي معادلة دائرة نصف قطرها نق = $\sqrt{١٥}$ لأن $أ^{٢} = ب^{٢} = نق^{٢}$

ومركزها (- ٣ ، ١)



وبعد حل الأمثلة السابقة المنوعة وأمثالها يمكن ملاحظة ما يلي وعلى المعادلة العامة للقطوع المخروطية لاستنتاج نوع القطع المخروطي قبل تحويلها الى الصورة القياسية:

بما أن أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + د س + هـ = صفر

فإن التركيز سينصب على المعاملين أ ، ب أكثر من غيرهما كونهما بالذات القادرين على تحديد نوع منحنى القطع المخروطي كما يلي بعد الأمثلة السابقة:

(i) عندما يكون أحد المعاملين أ ، ب صفراً فإن أ × ب = صفر وليس الاثنان معاً

أي أن أ = صفر ، ب $\neq$ صفر

أو أ $\neq$ صفر ، ب = صفر

فالمعادلة لقطع مكافئ:

مثال:

س^{٢} + ٤ س – ص + ١ = صفر قطع مكافئ سيني

وكذلك ص^{٢} + ص – س = ١ قطع مكافئ صادي.

(ii) اذا اتفقت اشارتا أ، ب وكانتا موجبتين أو سالبتين معاً، أي أن أ × ب $>$ صفر دائماً فإن المعادلة لقطع ناقص كونها تحوي س^{٢} ، ص^{٢} وبنفس الاشارة والحالة خاصة اذا كان أ = ب فالمعادلة لدائرة.

مثال:

٢٥ س^{٢} + ٣٦ ص^{٢} = ١ قطع ناقص

وكذلك - ٤ ص + ٢٤ س - ٣٦ - ٤ س^{٢} – ص^{٢} = صفر قطع ناقص.

٥ س^{٢} + ٥ ص^{٢} = ٢٥ دائرة

(iii) اذا اختلفت اشارتا أ ، ب أي اذا كان أ × ب < صفر دائماً، تصبح المعادلة لقطع زائد:

مثال:

ص^{٢} - ٩ س^{٢} - ٨ ص + ٣٦ س - ٢٩ = صفر زائد

٢٥ س^{٢} — ٤ ص^{٢} - ٢٥٠ س - ١٦ ص + ٥٤١ = صفر زائد

وباختصار شديد:

اذا كان أ ب > صفر قطع ناقص (يحتوي س^{٢}، ص^{٢} نفس الاشارة ، أ س^{٢} + ب ص^{٢} المميز

واذا كان أ ب > صفر و أ = ب دائرة (يحتوي س^{٢} ، ص^{٢} نفس الاشارة ١ س^{٢} + ص^{٢} المميز

واذا كان أ ب < صفر قطع زائد (يحتوي س^{٢}، ص^{٢} باشارتين مختلفتين أ س^{٢} — ب ص^{٢} المميز

أما اذا ظهر س^{٢} ، أي أ ± صفر واختص ص^{٢} أي ب = صفر

أو العكس ⟵ قطع مكافئ مميزه

أ س^{٢} أو ب ص^{٢}

ولا ننسى أخيراً:

ص = أ س^{٢} + ب س + جـ ⟵ قطع مكافئ صادي

س = أ ص^{٢} + ب ص + جـ ⟵ قطع مكافئ ، سيني

هاتان المعادلتان تخصان القطع المكافئ فقط.

(٢٣- ٥) أمثلة محلولة على القطوع المخروطية

مثال (١) :

ما المحل الهندسي وما معادلته لنقطة متحركة مثل ن (س ، ص) حسب كل شرط من الشروط التالية:

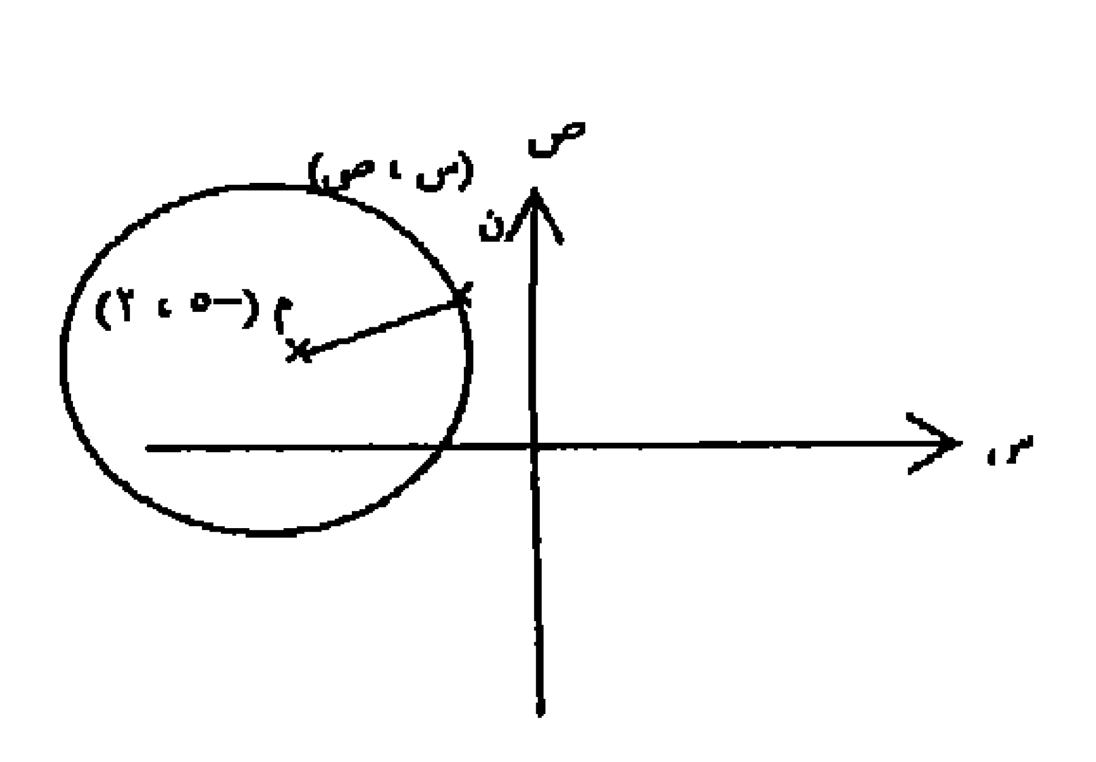
(i) بعدها عن النقطة م (- ٥ ، ٢) يساوي ٤ وحدات.

(ii) بعدها عن المستقيم ٤ ص = ٣ س + ٥ يساوي ١ وحدة وتمر أثناء حركتها بنقطة الأصل و (٠ ، ٠)

(iii) بعدها عن النقطة ب (٣ ، - ١) يساوي بعدها عن المستقيم س = ١ دائماً.

الحل:

بمناقشة المحال الهندسية نستخدم قوانين المسافة والرسم للتوضيح هكذا:



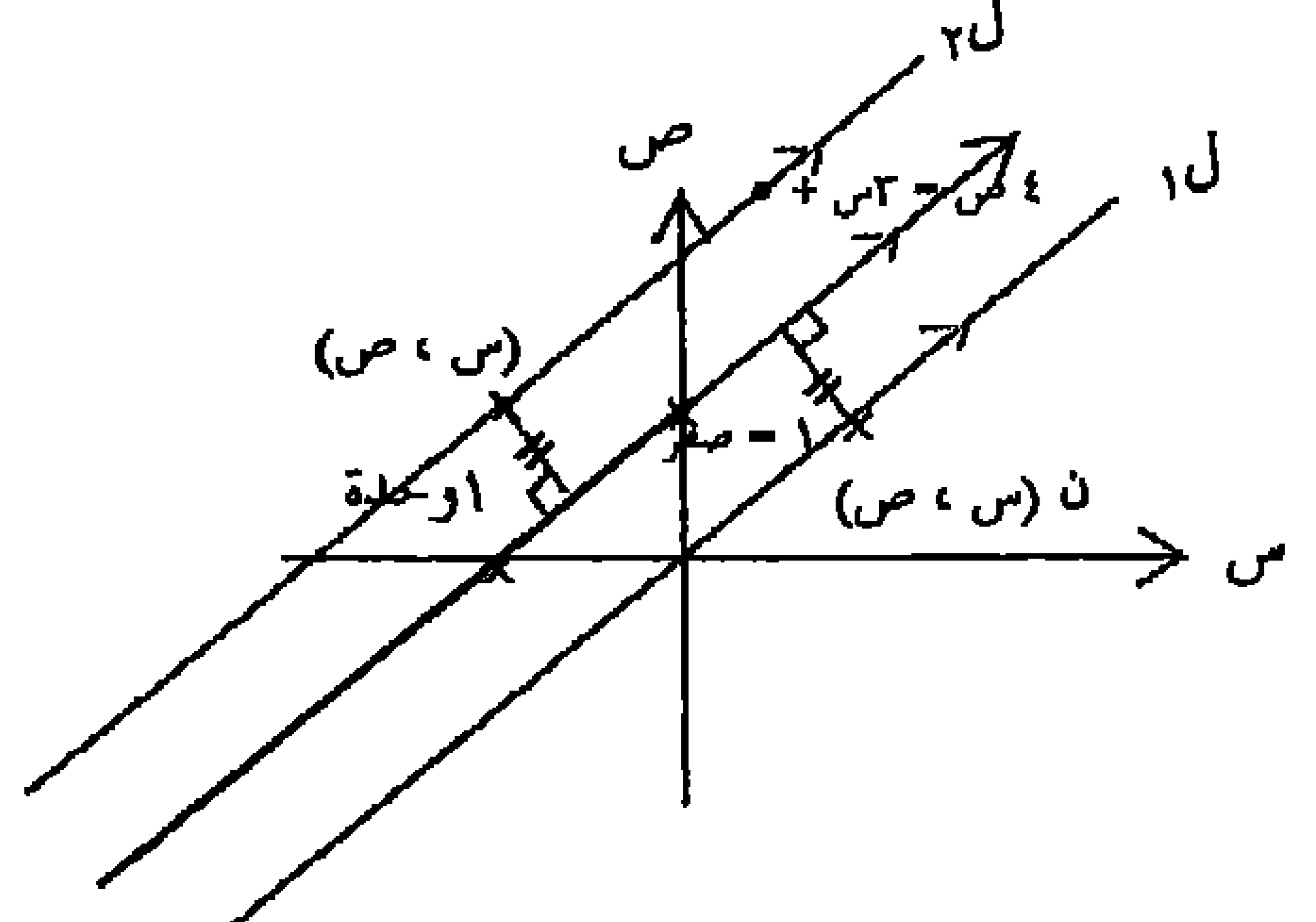
(i) م ن = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

∴ $\sqrt{(س + ٥)^٢ + (ص - ٢)}$ = ٤

وبعد التربيع

$(س + ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ١٦$

وهذه الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها م (- ٥ ، ٢) ونصف قطرها ٤ وحدات.



فالمحل الهندسي هو دائرة.

(ii) نرسم المستقيم ٤ ص = ٣ س + ٥

س	٠	$-\frac{٥}{٣}$
ص	$\frac{٥}{٤}$	٠

الصورة العامة للمستقيم على الشكل أ س + ب ص + جـ = صفر

أي: - ٣ س + ٤ ص - ٥ = صفر

المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) والتي تبعد ١ وحدة عن المستقيم

- ٣ س + ٤ ص - ٥ = صفر هو مستقيم و "واحد من اثنين في الرسم"

ل١ أو ل٢

ومعادلته:

$$ع = \left| \frac{أ س_١ + ب ص_١ + جـ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} \right|$$

$$\therefore ١ = \left| \frac{- ٣ س + ٤ ص - ٥}{\sqrt{٩ + ١٦}} \right|$$

$$\therefore ١ = \left| \frac{- ٣ س + ٤ ص - ٥}{٥} \right|$$

$$\therefore \left| - ٣ س + ٤ ص - ٥ \right| = ٥$$

وبعد فك القيمة المطلقة

∴ - ٣ + ٤ ص - ٥ = ٥ أو - ٣ + ٤ ص - ~~٥~~ = ~~- ٥~~

- ٣ س + ٤ ص - ١٠ = صفر أو ٤ ص = ٣ س ⟵ ل١

أي ٤ ص = ٣ س + ١٠ ⟵ ل٢

وعندما نحقق نقطة الأصل في المعادلتين نجد:

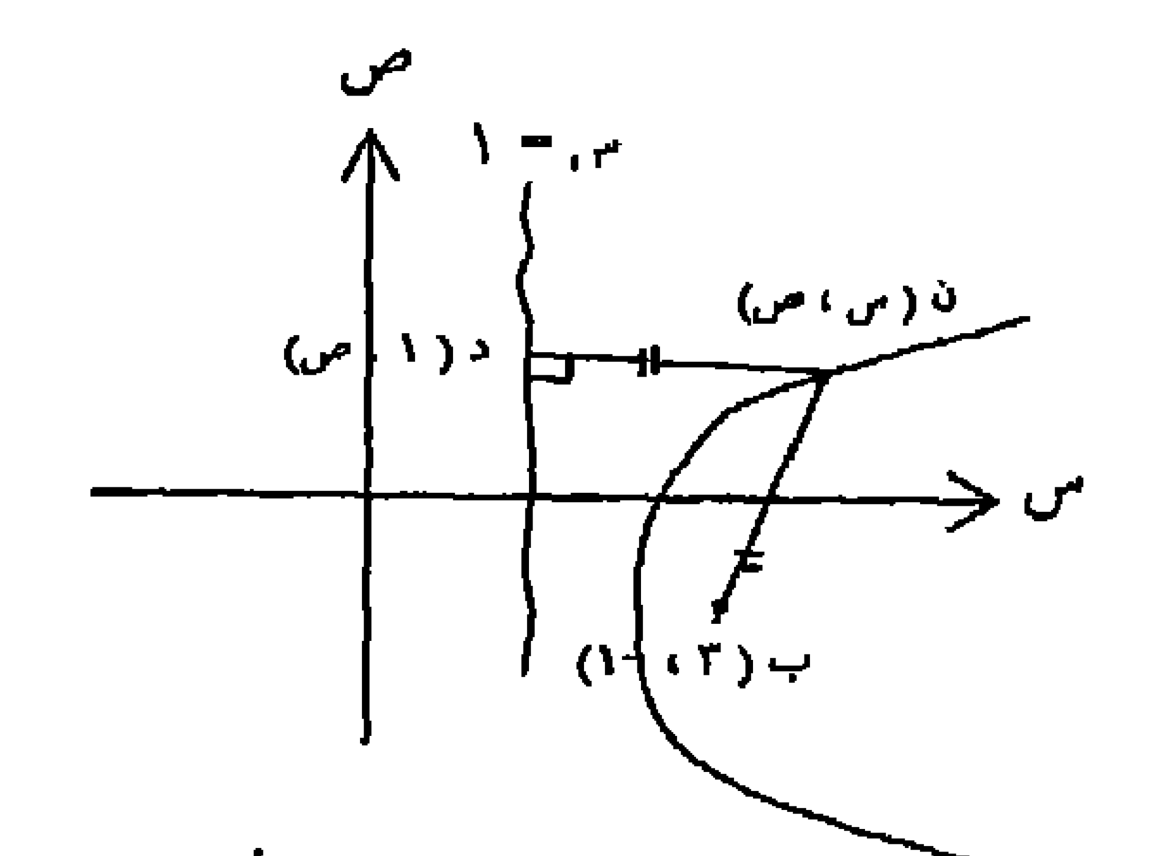
٤ (٠) $\overset{?}{=}$ ٣ (٠) ⟵ صفر = صفر نعم

٤ (٠) $\overset{?}{=}$ ٣ (٠) + ١٠ ⟵ صفر ≠ ١٠ لا

∴ المحل الهندسي ل١ ومعادلته ٤ ص = ٣ س

(iii) الشكل يوضح المحل الهندسي

وهو قطع مكافئ



معادلته:

ن ب = ن د

$\sqrt{(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢}} = \sqrt{(س - ١)^{٢} + (ص - ص)^{٢}}$

$(س - ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = (س - ١)^{٢}$

$س^{٢} - ٦ س + ٩ + ص^{٢} + ٢ ص + ١ = س^{٢} - ٢ س + ١$

$ص^{٢} + ٢ ص = ٦ س - ٢ س - ٩$

$ص^{٢} + ٢ ص = ٤ س - ٩$ باكمال المربع

$ص^{٢} + ٢ ص + ١^{٢} = ٤ س - ٩ + ١^{٢}$

$(ص + ١)^{٢} = ٤ س - ٨ = ٤ (س - ٢)$

$\therefore (ص - هـ)^{٢} = ٤ جـ (س - د)$

حيث جـ = ١

رأسه م (٢ ، −١)

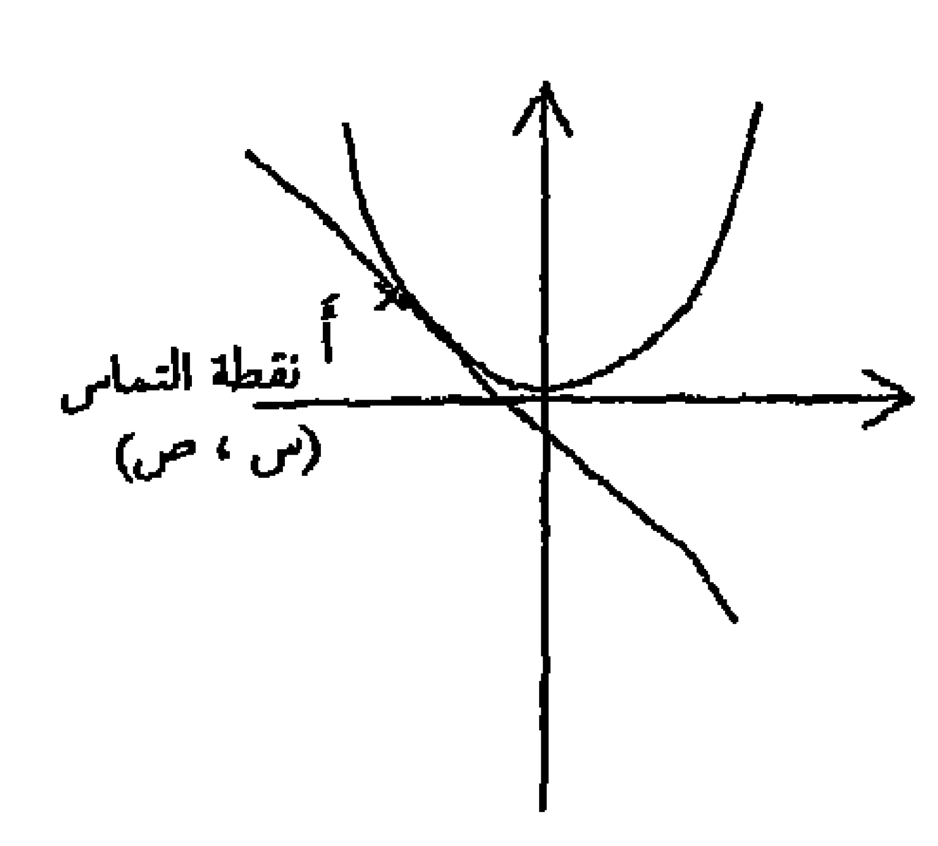
كما في الشكل المجاور.

مثال (٢):

ما قيمة جـ ليكون المستقيم س + ص = جـ

مماساً للقطع المكافئ $س^{٢} = ٢ ص$ ؟

الحل:



نجد أولاً احداثيات نقطة التماس من العلاقة:

م المماس = م المنحنى

م المماس: $١ + \frac{د ص}{د س} = $ صفر باشتقاق المعادلة س + ص = جـ

∴ $\frac{د ص}{د س} = -١$ ميل المماس:

م المنحنى: ٢ س $= ٢ \cdot \frac{د ص}{د س}$ باشتقاق المعادلة $س^٢ = ٢$ ص

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س}{٢} =$ س ميل المنحنى

∴ س = -١ الاحداثي السيني لنقطة التماس

ومنها: ص = $\frac{(-١)^٢}{٢} = \frac{١}{٢}$ عوضنا ب = -١ في المعادلة $س^٢ = ٢$ ص

∴ نقطة التماس أ $(-١ ، \frac{١}{٢})$

ويما أن نقطة التماس واقعة على المنحنى، والمماس معاً فإنها تحقق معادلةالمماس كما يلي:

س + ص = جـ

∴ $-١ + \frac{١}{٢} =$ جـ

⟵ جـ = $-\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المماس تصبح: س + ص = $-\frac{١}{٢}$

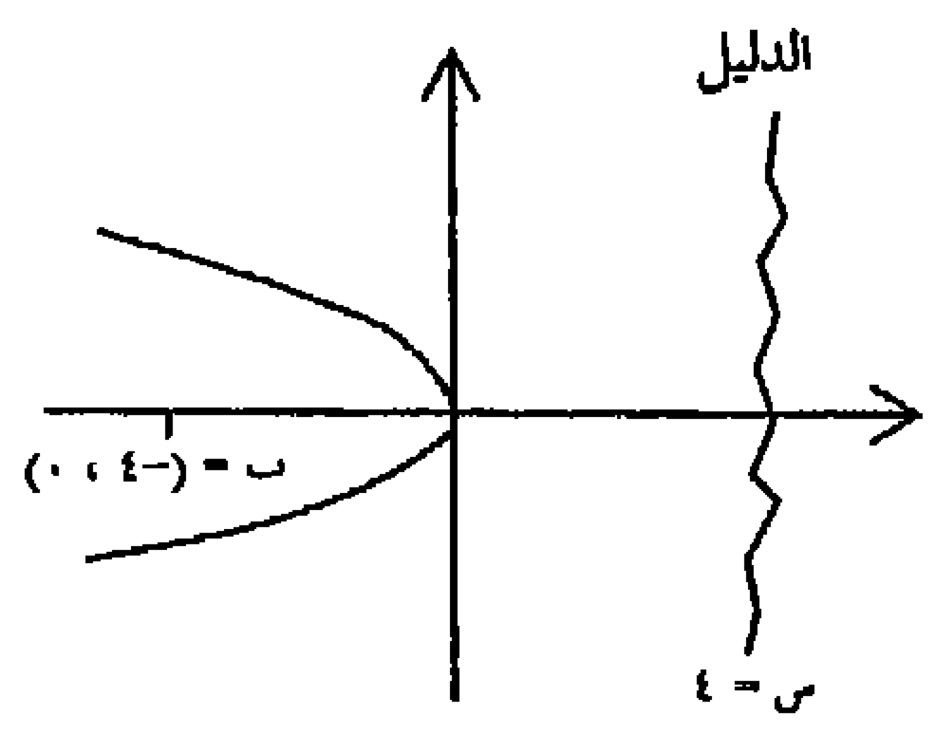
مثال (٣):

أوجد مكونات وعناصر القطع المكافئ الذي معادلته ص^{٢} = - ١٦ س

الحل:

انه سيني مفتوح لليسار ورأسه نقطة الأصل كما في الشكل.

معادلته القياس



ص^{٢} = - ٤ جـ س

لكن ص^{٢} = - ١٦ س

∴ ٤ جـ = ١٦ ⟵ جـ = ٤

فعناصره ومكوناته كما في موضحة على الشكل.

رأسه و(٠ ، ٠)

بؤرته ب (- ٤ ، ٠)

معادلة محوره ص = صفر كونه محور السينات

معادلة دليله س = ٤

اختلافه المركزي هـ = ١ دائماً.

مثال (٤):

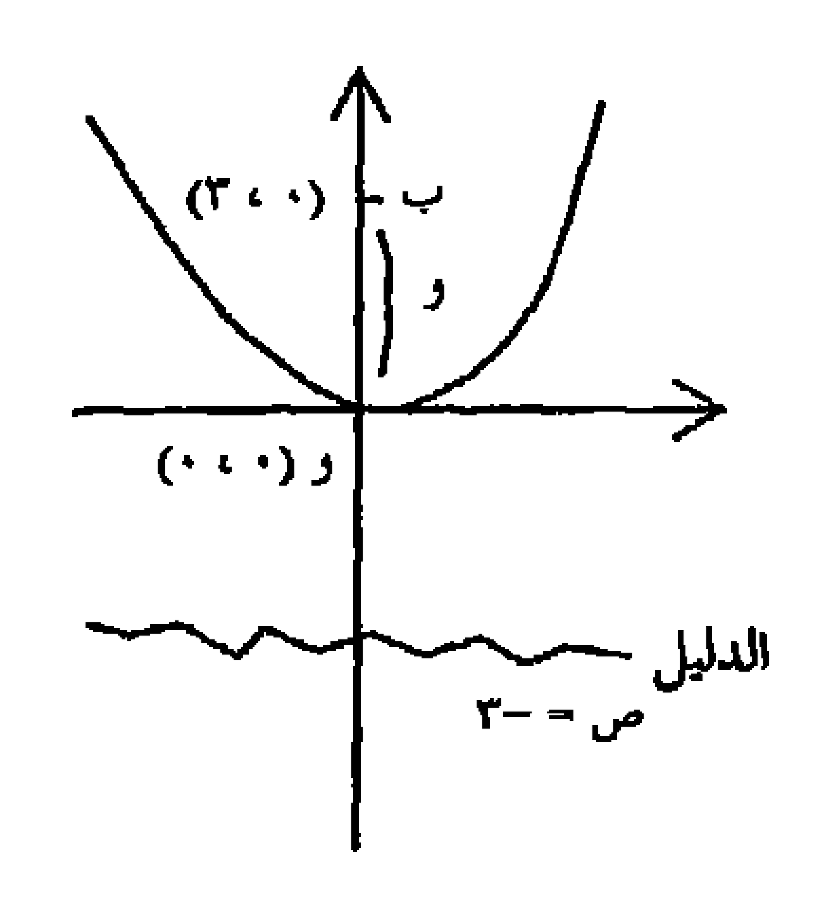
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٠ ، ٣) ومعادلة دليله ص = - ٣

الحل:

انه صادي مفتوح للأعلى ورأسه نقطة الأصل كما في الشكل.



معادلته القياسية:



س^{٢} = ٤ جـ ص

لكن جـ = البعد بين الرأس والبؤرة =

البعد بين الرأس والدليل = ٣

∴ س^{٢} = (٤) (٣) ص

∴ س^{٢} = ١٢ ص

=

مثال (٥):

أوجد عناصر ومكونات القطع المكافئ الذي معادلته:

س^{٢} + ٢ س – ٦ ص - ١٧ = صفر

الحل:

باكمال المربع:

س^{٢} + ٢ س = ٦ ص + ١٧

باضافة مربع نصف معامل س للطرفين:

س^{٢} + ٢ س + ١^{٢} = ٦ ص + ١٧ + ١^{٢}

(س + ١)^{٢} = ٦ ص + ١٨ = ٦ (ص + ٣)

∴ (س + ١)^{٢} = ٦ (ص + ٣)

أصبح واضح أنه صادي مفتوح للأعلى كما في الشكل:

ورأسه:

$(س - د)^2 = ٤ جـ (ص - هـ)$

∴ رأسه م (- ١ ، - ٣)

٤ جـ = ٦ ⟵ جـ = $\frac{٣}{٢}$ = ١,٥

بؤرته ب (- ١ ، - $\frac{٣}{٢}$)

معادلة محوره س = - ١

معادلة دليله ص = - $\frac{٩}{٢}$

واختلافه المركزي = ١ دائماً

مثال (٦):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٠ ، ٠)

ومعادلة دليله س = ٥

واضح من الرسم أنه سيني مفتوح لليسار

رأسه م ($\frac{٥}{٢}$ ، ٠)

معادلته القياسية:

$(ص - هـ)^2 = - ٤ جـ (س - د)$

لكن جـ = البعد بين الرأس والدليل = البعد بين البؤرة والرأس

أي أن ٢ جـ = ٥ ⟵ جـ = $\frac{٥}{٢}$

رأسه م ($\frac{٥}{٢}$، ٠) كما في الشكل

∴ معادلته $(ص - ٠)^{٢} = (-٤)\left(\frac{٥}{٢}\right)\left(س - \frac{٥}{٢}\right)$

$ص^{٢} = -١٠\left(س - \frac{٥}{٢}\right)$

$ص^{٢} = -١٠ س + ٢٥$

أو $١٠ س = - ص^{٢} + ٢٥$

∴ $س = -\frac{١}{١٠} ص^{٢} + \frac{٢٥}{١٠}$ هذه الصورة العامة للمعادلة

وبالشكل $س = أ ص^{٢} + ب ص + جـ$

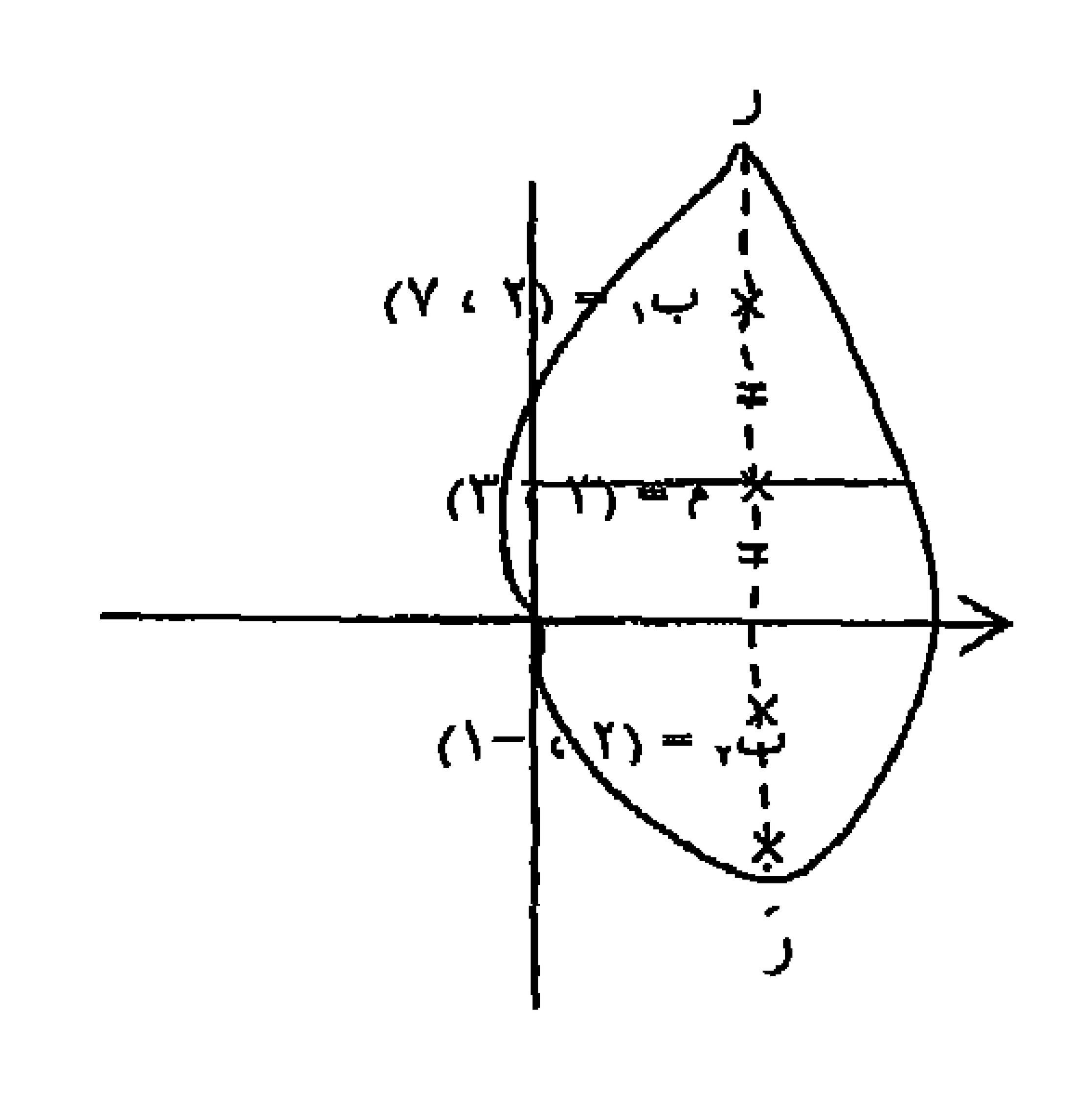
لاحظ أنه مفتوح لليسار كون $أ = -\frac{١}{١٠}$ سالب

مثال (٧):

اكتب معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $ب_{١} (٢ ، -١)$ ، $ب_{٢} (٢ ، ٧)$

وطول محوره الأكبر = ١٢

صادي كما هو واضح بالشكل



معادلته القياسية:

$$\frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{أ^{٢}} = ١$$

وبما أن $ب_{١} ب_{٢} = ٢ جـ$ البعد البؤري

طول $ب_{١} ب_{٢} = ٧ - (-١) = ٨$

∴ $٢ جـ = ٨$

$جـ = ٤$

∴ مركزه م (٢ ، ٣)

المعادلة:

$$\frac{(س - ٢)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - ٣)^٢}{أ^٢} = ١$$

لكن ٢ أ = ١٢ بالمعطيات ⟵ أ = ٦

لكن $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$ كونه قطع ناقص

∴ $(٤)^٢ = (٦)^٢ - ٧^٢$

$ب^٢ = ٣٦ - ١٦ = ٢٠$

∴ المعادلة:

$$\frac{(س - ٢)^٢}{٢٠} + \frac{(ص - ٣)^٢}{٣٦} = ١$$ الصورة القياسية

وبعد التربيع والتبسيط تصبح معادلته العامة:

$٩ س^٢ + ٥ ص^٢ - ٣٦ س - ٣٠ ص - ٩٩ =$ صفر

مثال (٨):

أوجد مكونات وعناصر القطع الناقص الذي معادلته:

$٢٥ (س + ١)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١$

الحل:

نبسط المعادلة لتصبح بالشكل:

$٢٥ (س + ١)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١$

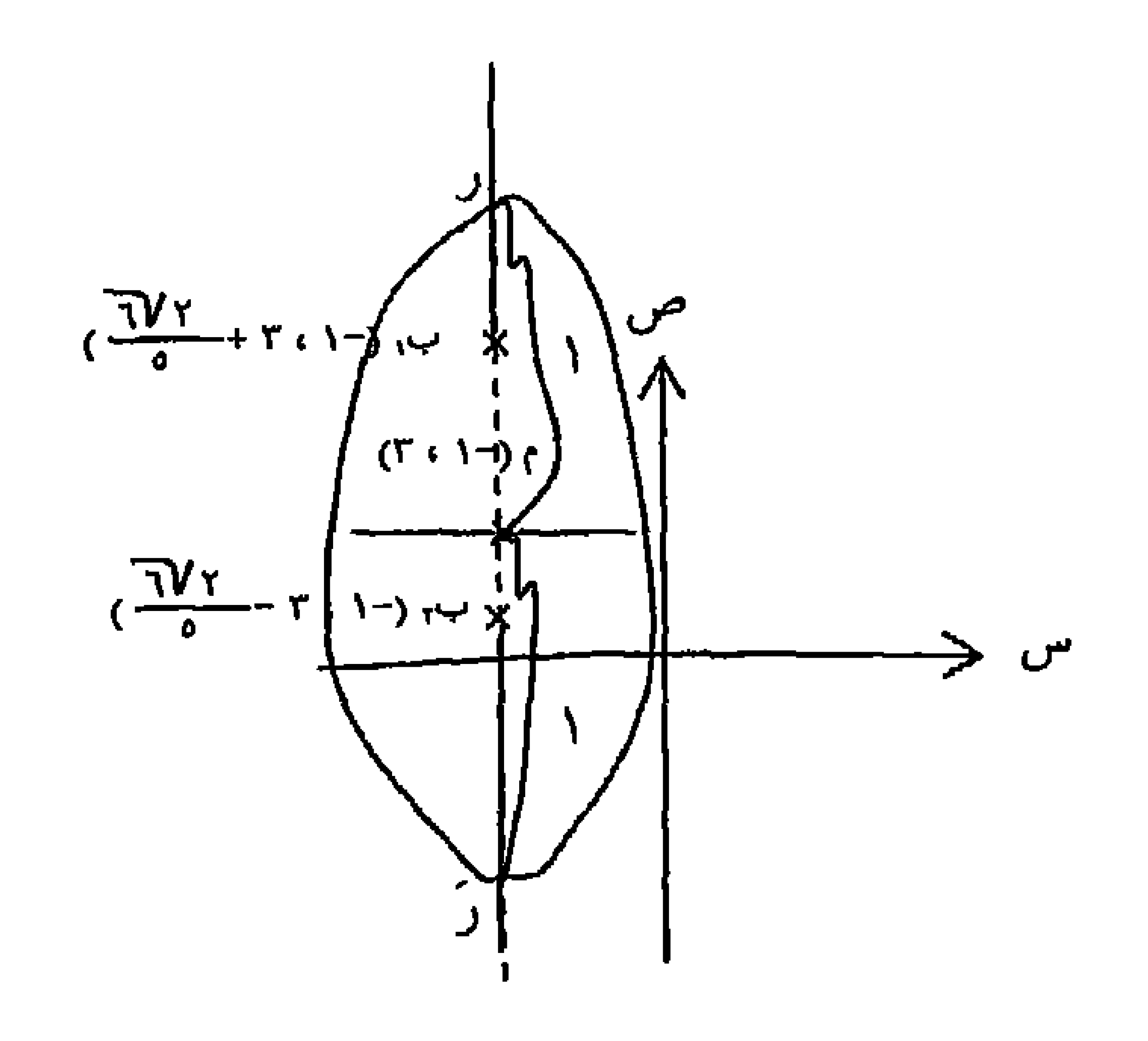
$$\frac{(س + ١)^٢}{\frac{١}{٢٥}} + \frac{(ص - ٣)^٢}{١} = ١$$

معادلة قطع ناقص صادي



وعلى الصورة القياسية:

$$\frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{أ^{٢}}$$



مركزه م(- ١ ، ٣)

$م^{٢} = ١ \leftarrow أ = ١$

٢ أ = ٢ طول محوره الأكبر

$ب^{٢} = \frac{١}{٢٥} \leftarrow ب = \frac{١}{٥}$

$٢ ب = \frac{٢}{٥}$ طول محوره الأصغر

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} = ١ - \frac{١}{٢٥} = \frac{٢٤}{٢٥}$

$جـ = \frac{\sqrt{٢٤}}{٥} = \frac{٢\sqrt{٦}}{٥}$

الرأسين = ر(- ١ ، ٤) ، ر̀(- ١ ، ٢)

اختلافه المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\frac{٢\sqrt{٦}}{٥}}{١}$

$$= \frac{٢\sqrt{٦}}{٥} = \frac{٢(٢,٤٤٩)}{٥} = \frac{٤,٨٩٨}{٥} < ١$$

مثال (٩):

اذا كانت النقطة ن (س ، ص) تتحرك في المستوى الديكارتي بحيث أن س = ٢ + ٣ جا هـ ، ص = ٥ + ٣ جتا هـ حيث هـ زاوية متغيرة.

بيّن أن النقطة ن تتحرك على محيط دائرة وأوجد مركز ونصف هذه الدائرة.

الحل:

بما أن $س = ٢ + ٣$ جا هـ

$ص = ٥ + ٣$ جتا هـ

فإننا سنربط (س) بـ (ص) وذلك باستبعاد النسب المثلثية جا هـ ، جتا هـ كما يلي:

$س = ٢ + ٣$ جا هـ

∴ $س - ٢ = ٣$ جا هـ ومنها:

جا هـ $= \frac{س - ٢}{٣}$ ——— (١)

وكذلك $ص = ٥ + ٣$ جتا هـ

∴ $ص - ٥ = ٣$ جتا هـ

ومنها جتا هـ $= \frac{ص - ٥}{٣}$ ——— (٢)

لكن جا^٢ هـ + جتا^٢ هـ = ١ متطابقة مثلثية

$$∴ \left(\frac{س - ٢}{٣}\right)^٢ + \left(\frac{ص - ٥}{٣}\right)^٢ = ١$$

$$٩ \times \left\{ \frac{(س - ٢)^٢}{٩} + \frac{(ص - ٥)^٢}{٩} = ١ \right\}$$

$$(س - ٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٩$$

وهذه صورة قياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها م (٢ ، ٥)

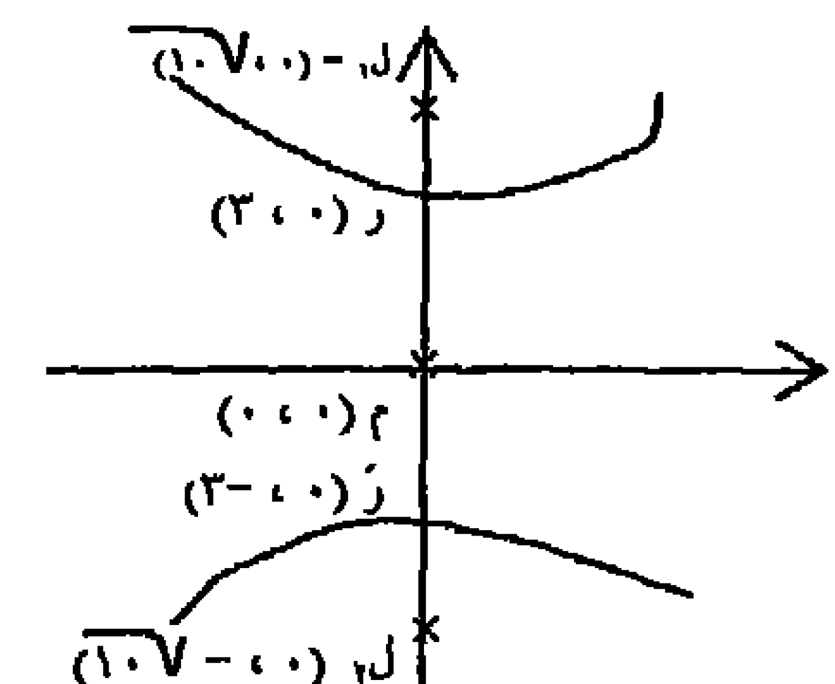
ونصف قطرها نق $= \sqrt{٩} = ٣$ وحدات طولية

مثال (١٠):

ما احداثيات البؤرتين للقطع الزائد الذي معادلته:

$ص^٢ - ٩ س^٢ = ٩$

الحل:



نقسم المعادلة على ٩ هكذا:

$$\frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{١} = ١$$

فهو صادي مركزه نقطة الأصل كما في الشكل:

معادلته القياسية:

$$\frac{ص^٢}{أ^٢} - \frac{س^٢}{ب^٢} = ١$$

$أ^٢ = ٩$ ⟵ أ = ٣ ⟵ رأسيه ر (٠ / ٣) ، رَ (٠ ، - ٣)

$ب^٢ = ١$ ⟵ ب = ١

لكن $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ٩ + ١ = ١٠$

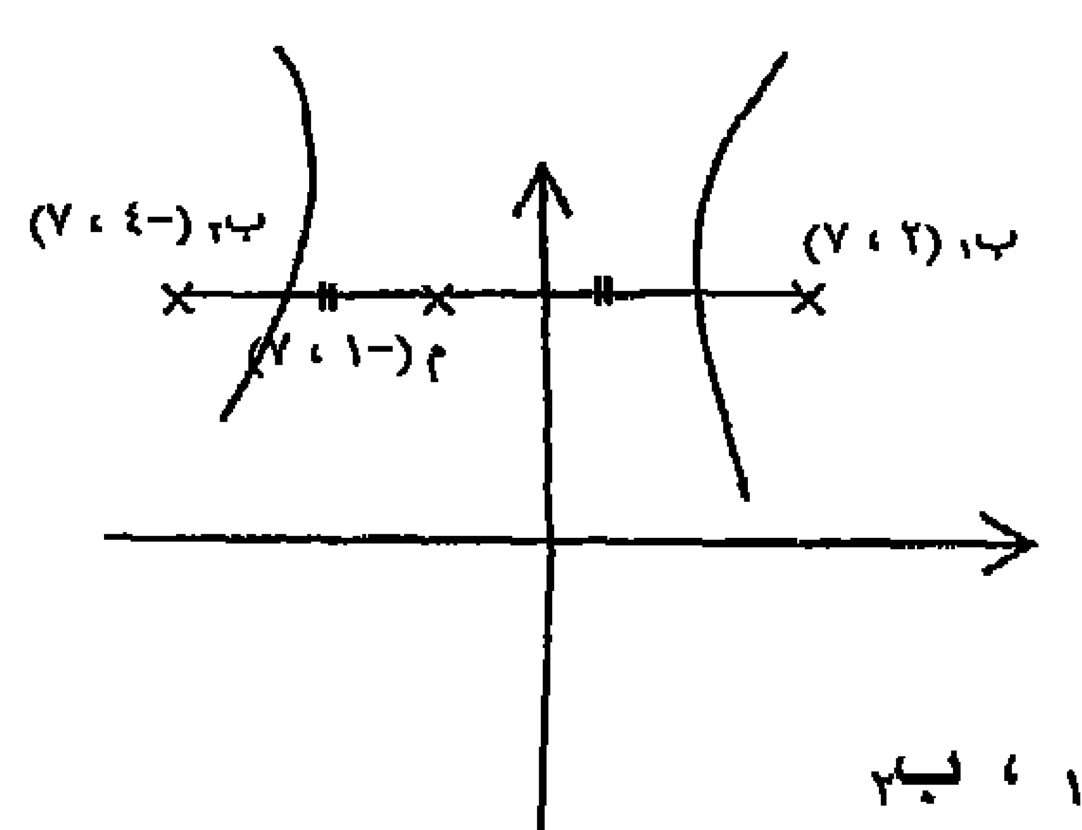
$جـ = \sqrt{١٠}$

البؤرتان: $ل_١ (٠ ، \sqrt{١٠})$ ، $ل_٢ (٠ ، -\sqrt{١٠})$

مثال (١١):

اكتب معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي هـ = $\frac{٥}{٣}$

واحداثيات بؤرتيه $ب_١ (٢ ، ٧)$ ، $ب_٢ (- ٤ ، ٧)$



الحل:

من الشكل الواضح أنه سيني

احداثيات مركزه م هي منتصف البعد البؤري $ب_١$ ، $ب_٢$

∴ م (- ١ ، ٧) وكذلك ٢ جـ = ٢ – (- ٤) = ٦ ⟵ جـ = ٣

بما أنه سيني فمعادلته القياسية:

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} - \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = ١$$

$$\therefore \frac{(س + ١)^2}{أ^2} - \frac{(ص - ٧)^2}{ب^2} = ١$$

لكن اختلافه المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$

وبما أن جـ = ٣

$$\therefore \frac{٥}{٣} = \frac{٣}{أ} \longrightarrow أ = \frac{٩}{٥}$$

$$أ^2 = \frac{٨١}{٢٥}$$

وبما أن $جـ^2 = أ^2 + ب^2$ قطع زائد

$$\therefore (٣)^2 = \frac{٨١}{٢٥} + ب^2 \longrightarrow ب^2 = ٩ - \frac{٨١}{٢٥} = \frac{٢٢٥ - ٨١}{٢٥}$$

$$\therefore ب^2 = \frac{١٤٤}{٢٥}$$

$$\therefore \frac{(س + ١)^2}{\frac{٨١}{٢٥}} - \frac{(ص - ٧)^2}{\frac{١٤٤}{٢٥}} = ١$$

أي أن: $\frac{٢٥ (س + ١)^2}{٨١} - \frac{٢٥ (ص - ٧)^2}{١٤٤} = ١$ الصورة القياسية

وعند تحويلها الى الصورة العامة:

$$٨١ \times ١٤٤ \left\{ \frac{٢٥ (س + ١)^2}{٨١} - \frac{٢٥ (ص - ٧)^2}{١٤٤} = ١ \right\}$$

$$٢٥ \times ١٤٤ (س + ١)^2 - ٢٥ \times ٨١ (ص - ٧)^2 = ٨١ \times ١٤٤$$

$$٣٦٠٠ (س + ١)^2 - ٢٠٢٥ (ص - ٧)^2 = ١١٦٦٤$$

$$٣٦٠٠ (س^2 + ٢ س + ١) - ٢٠٢٥ (ص^2 - ١٤ ص + ٤٩) = ١١٦٦٤$$

٣٦٠٠ س^{٢} + ٧٢٠٠ س + ٣٦٠٠ − ٢٠٢٥ ص^{٢} + ١٤٣٥٠ ص + ٩٩٢٢٥ − ١١٦٦٤ = صفر

٣٦٠٠ س^{٢} − ٢٠٢٥ ص^{٢} + ٧٢٠٠ س + ١٤٣٥٠ ص + ٩١١٦١ = صفر

وهذه المعادلة العامة للقطع الزائد.

مثال (١٢):

أوجد احداثيات المركز ونصف القطر للدائرة التي معادلتها:

٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ١٨ س − ٦ ص + ٣ = صفر

الحل:

نقسم المعادلة على ٣ لتصبح:

س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ٢ ص + ١ = صفر ثم باكمال المربعين كما يلي:

(س^{٢} + ٦ س) + (ص^{٢} − ٢ ص) = − ١

باضافة مربع نصف معامل كل متغير الى الطرفين:

(س^{٢} + ٦ س + ٣^{٢}) + (ص^{٢} − ٢ ص + ١^{٢}) = − ١ + ٣^{٢} + ١^{٢}

(س + ٣)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٩



والصورة القياسية:

(س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

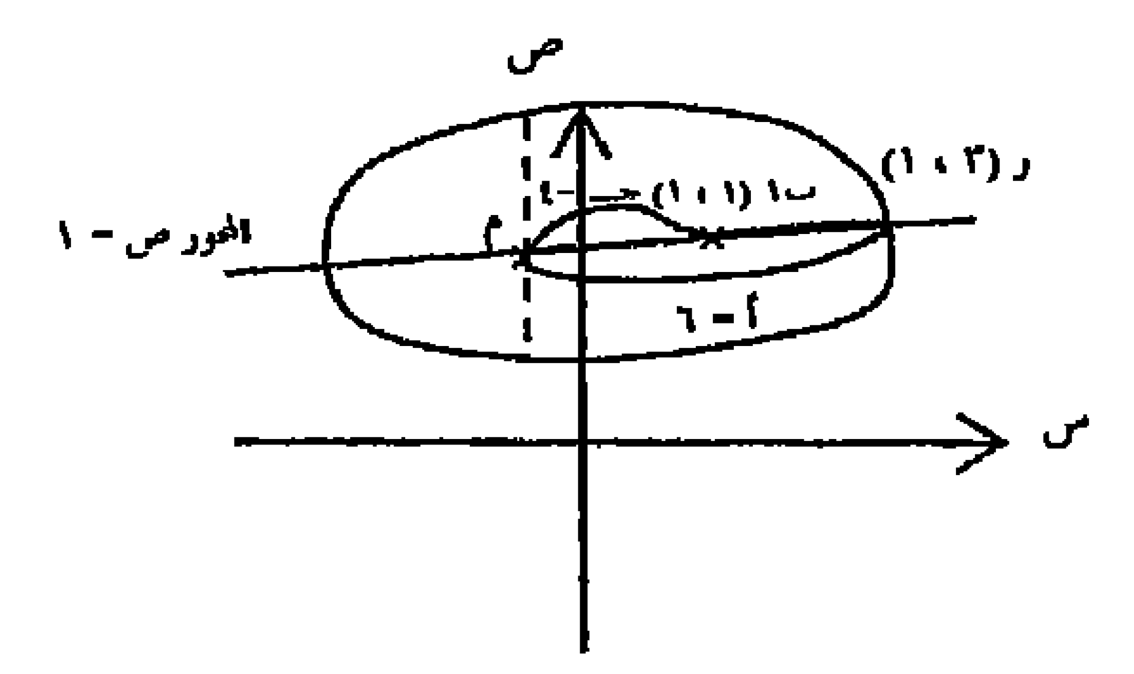
∴ المركز م (− ٣ ، ١) ، نق = $\sqrt{٩}$ = ٣

مثال (١٣):

قطع ناقص اختلافه المركزي هـ = $\frac{٢}{٣}$ وأحد رأسيه ر (٣ ، ١) والبؤرة القريبة منه ب$_{١}$ (١ ، ١) اكتب معادلته.

الحل:

عند تجسيد هذه الأوصاف على السطح البياني هكذا:



بما أن هـ = $\frac{٢}{٣}$ ، لكن هـ = $\frac{جـ}{أ}$

∴ $\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ⟵ جـ = $\frac{٢}{٣}$ أ .... (١)

ر ب١ = أ − جـ   من الشكل

٣ − ١ = أ − جـ ⟵ أ − جـ = ٢ ⟵ (٢)

وبحل المعادلتين (١) مع (٢) هكذا:

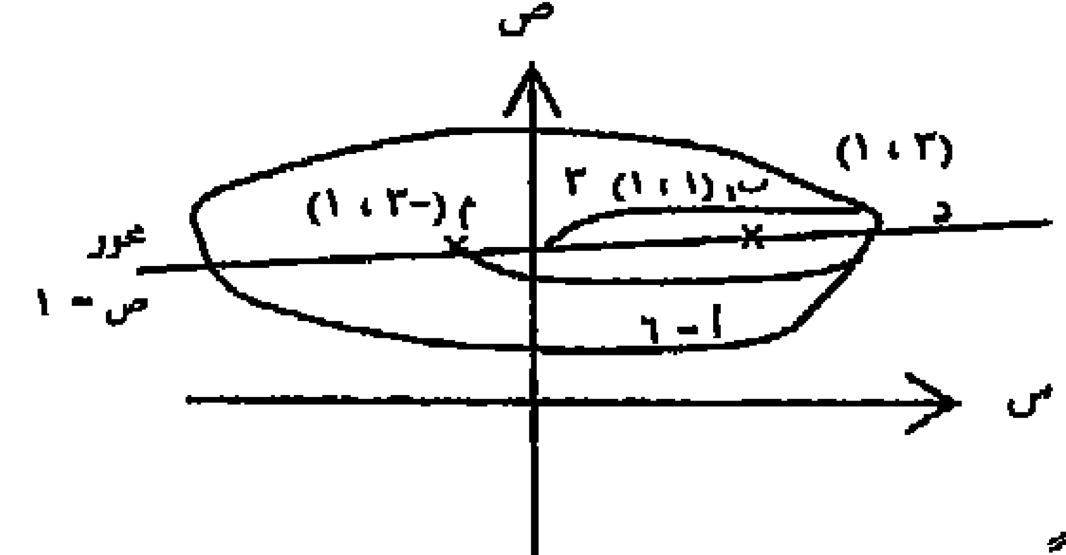
أ − $\frac{٢}{٣}$ أ = ٢ ⟵ أ = ٦

∴ جـ = أ − ٢ = ٦ − ٢ = ٤

لكن جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} قطع ناقص

∴ (٤)^{٢} = (٦)^{٢} − ب^{٢}

ب^{٢} = ٣٦ − ١٦ = ٢٠



لإيجاد المركز نقول ونستعين بالرسم ايضاً:

المركز (− ٣ ، ١)

∴ المعادلة: $\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

$$\frac{(س + ٣)^{٢}}{٣٦} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٢٠} = ١$$

مثال (١٤):

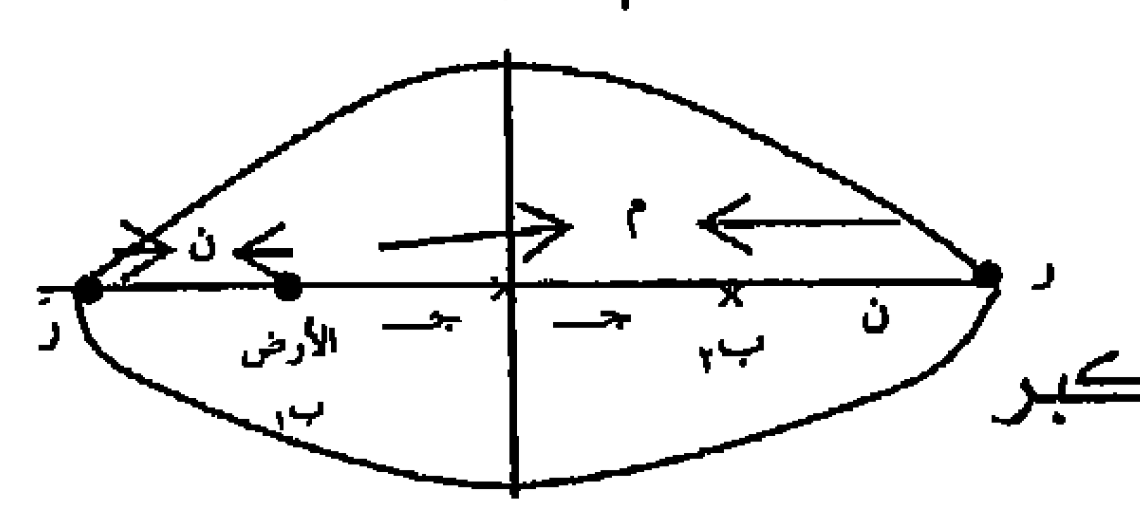
اذا علمت أن القمر يدور حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الأرض في احدى بؤرتيه كما في الشكل.

واذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر

تساوي م كم

وأقصر مسافة بينهما ن كم

فبيّن أن الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص يساوي $\frac{م - ن}{م + ن}$



بما أن ر رَ = ٢ أ (طول محوره الأكبر)

فإن ٢ أ = م + ن ٠٠٠٠٠ (١) طول محوره الأكبر

والبعد البؤري $ب_١ ب_٢$ = ٢ جـ = م − ن ٠٠٠٠٠٠ (٢) (واضح من الشكل)

$أ = \frac{م + ن}{٢}$ من (١)

$جـ = \frac{م - ن}{٢}$ من (٢)

لكن $هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\frac{م - ن}{٢}}{\frac{م + ن}{٢}} = \frac{م - ن}{م + ن}$ وهو المطلوب.

مثال (١٥):

اذا كان طول المحور القاطع (٢ أ) لقطع زائد يساوي ٣ أمثال طول محوره المرافق (٢ ب) فما قيمة اختلافه المركزي؟

الحل:

٢ أ = ٣ (٢ ب)

$\therefore$ ٢ أ = ٦ ب $\leftarrow$ أ = ٣ ب $\leftarrow$ ب = $\frac{١}{٣}$ أ

لكن جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = أ^٢ + ($\frac{١}{٣}$ أ)^٢ = أ^٢ + $\frac{١}{٩}$ أ^٢ = $\frac{١٠ أ^٢}{٩}$

$\therefore$ جـ = $\frac{\sqrt{١٠}}{٣}$ أ العلاقة بين جـ ، أ

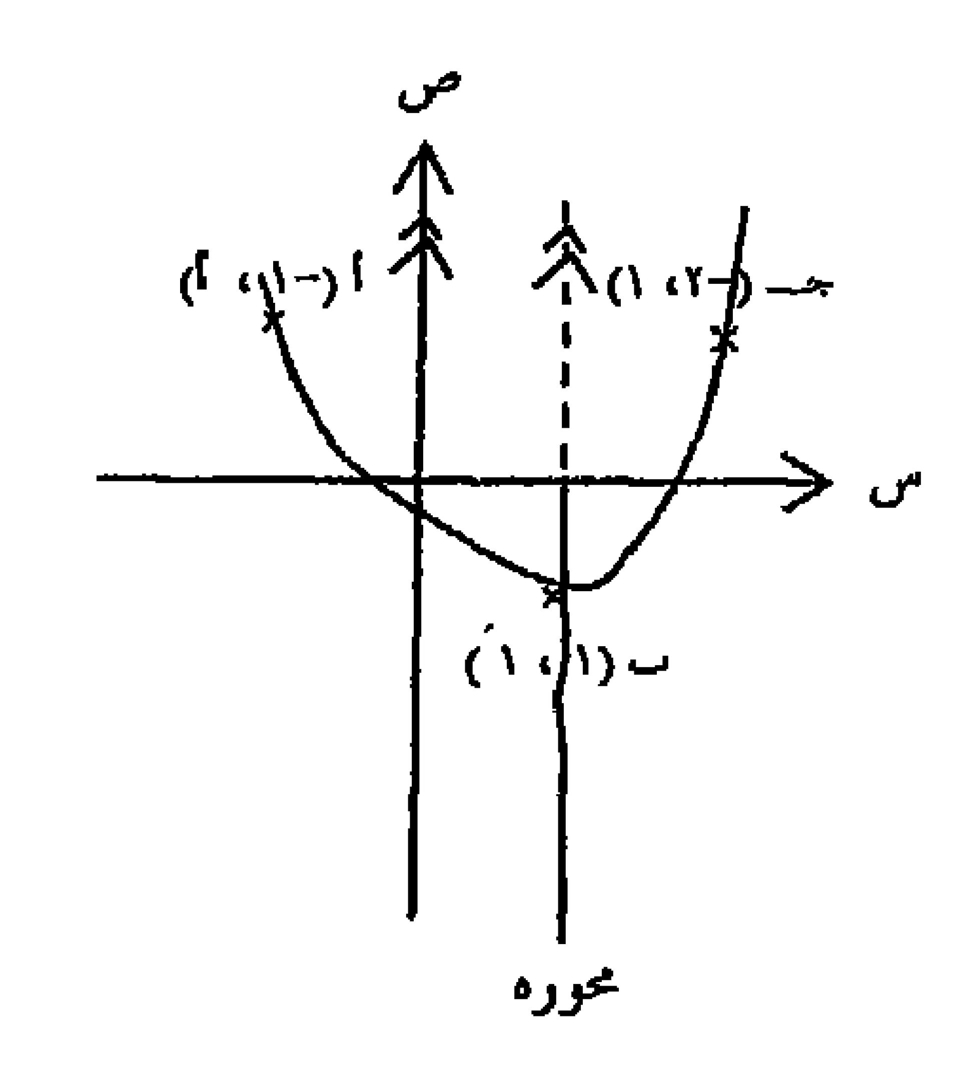
لكن هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\frac{\sqrt{١٠}}{٣} أ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{١٠}}{٣}$ > ١ طبعاً

"الاختلاف المركزي"

مثال (١٦):

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقط الثلاث:

أ (- ١ ، ٢) ، ب (١ ، - ١) ، جـ (٢ ، ١) ومحوره يوازي محور الصادات.



الرسم يوضح نوعه.

انه صادي ومفتوح للأعلى

كما هو واضح بالشكل.

معادلته العامة ص = أ س^٢ + ب س + جـ

والآن نعوض النقط الثلاث أ ، ب ، جـ

لنجد قيم أ ، ب ، جـ

هكذا:

أ (- ١)^٢ + ب (- ١) + جـ = ٢

أ – ب + جـ = ٢ (١) عند تعويض أ

أ (١)^٢ + ب (١) + جـ = - ١

أ + ب + جـ = - ١ (٢) عند تعويض ب

أ (٢)^{٢} + ب (٢) + جـ = ١

٤ أ + ٢ ب + جـ = ١ (٣) عند تعويض جـ

وبحل المعادلات الثلاث (١) ، (٢) ، (٣) بالحذف هكذا:

لحذف ب

أ − ب + جـ = ٢ (١)

أ + ب + جـ = − ١ (٢) جمعاً

٢ أ + ٢ جـ = ١ (٤)

لحذف ب

٢ (أ + ب + جـ = − ١) (٢)

− ١ (٤ أ + ٢ ب + جـ = ١) (٣)

٢ أ + ٢ ب + ٢ جـ = − ٢ (٢) ٢

− ٤ أ − ٢ ب − جـ = − ١ (٣)

− ٢ أ + جـ = − ٣ (٥)

لحذف أ

٢ أ + ٢ جـ = ١ (٤)

− ٢ أ + جـ = − ٣ (٥) جمعاً

٣ جـ = − ٢

جـ = $\frac{-٢}{٣}$

لكن ٢ أ + ٢ جـ = ١ (٤)

∴ ٢ أ + ٢ ($\frac{-٢}{٣}$) = ١

٣ (٢ أ − $\frac{٤}{٣}$ = ١)

٦ أ − ٤ = ٣

٦ أ = ٧

أ = $\frac{٧}{٦}$

لكن $\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} = -\ ١$

$$\therefore\ ٦\left(\frac{٧}{٦} + \text{ن} - \frac{٢}{٣}\right) = -\ ١$$

$$٧ + ٦\,\text{ب} - ٤ = -\ ٦$$

$$٦\,\text{ب} = -\ ٦ - ٣$$

$$٦\,\text{ب} = -\ ٩$$

$$\text{ب} = \frac{-٩}{٦} = \frac{-٣}{٢}$$

∴ المعادلة:

$$\text{ص} = \text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}$$

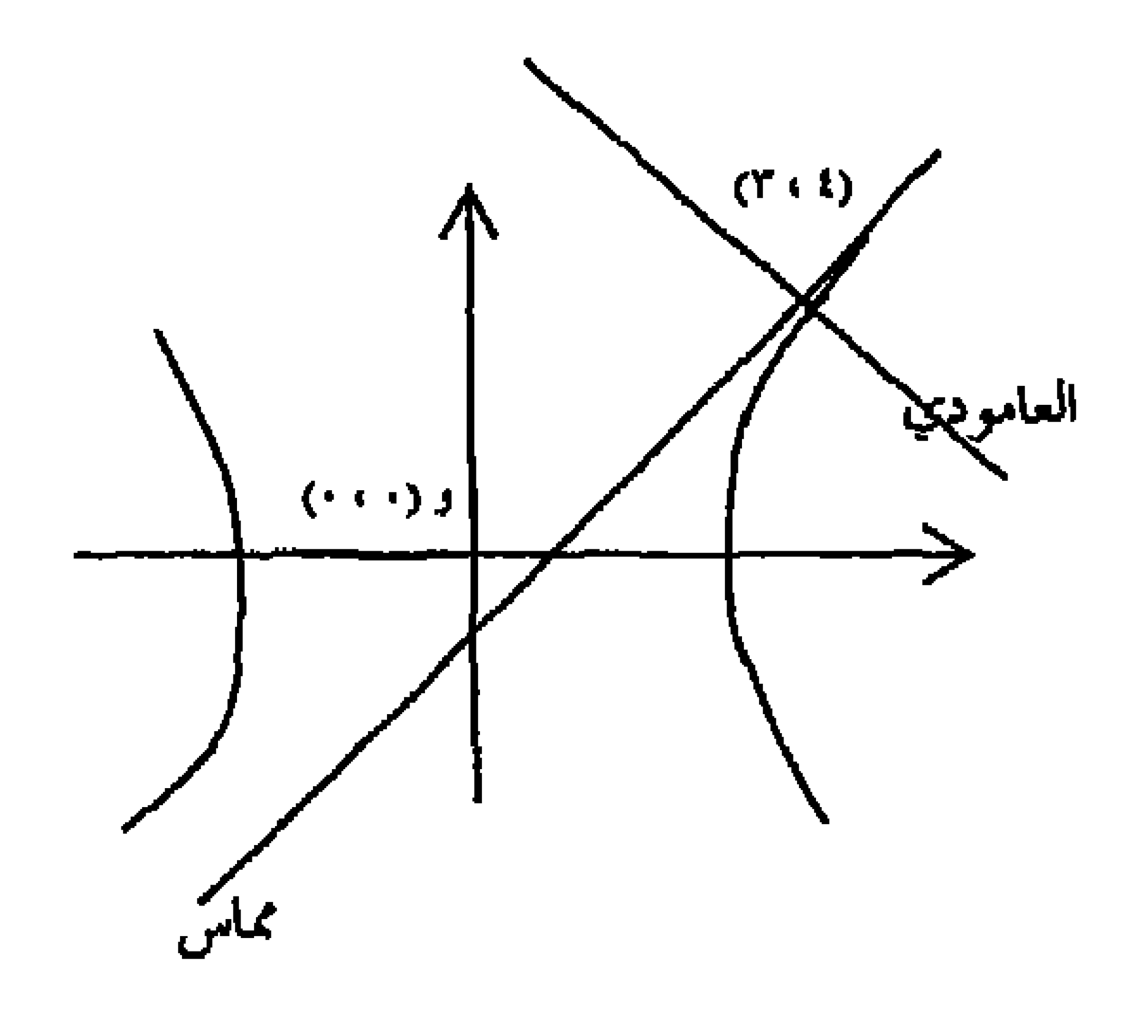
$$\text{ص} = \frac{٧}{٦}\,\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢}\,\text{س} - \frac{٢}{٣}$$

∴ معادلة القطع المكافئ العامة:

$$\text{ص} = \frac{٧}{٦}\,\text{س}^{٢} - \frac{٣}{٢}\,\text{س} - \frac{٢}{٣}$$

مثال (١٧):

أوجد معادلة المماس ومعادلة العامودي عليه للقطع الزائد $٩\,\text{س}^{٢} - ٨\,\text{ص}^{٢} = ٧٢$ عند النقطة (٤ ، ٣).



الحل:

$$\frac{٩\,\text{س}^{٢} - ٨\,\text{ص}^{٢} = ٧٢}{٧٢}$$

$$\frac{\text{س}^{٢}}{٨} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$$

سيني مركزه نقطة الأصل

نحقق نقطة الأصل:

$٩(٤)^٢ - ٨(٣)^٢ \overset{?}{=} ٧٢$

$١٤٤ - ٧٢ = ٧٢$ ∴ (٤ ، ٣) نقطة التماس وتقع على المنحنى

م مماس = قَ(٤) نجد قَ(س) أو $\frac{د ص}{د س}$ بالاشتقاق الضمني

$٩ س^٢ - ٨ ص^٢ = ٧٢$

$١٨ س - ١٦ ص \frac{د ص}{د س} = صفر$

$\frac{-١٦ ص}{-١٦ ص} \frac{د ص}{د س} = \frac{-١٨ س}{-١٦ ص}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٩ س}{٨ ص}$

م مماس $= قَ(٤) = \frac{د ص}{د س} \Big| = \frac{\cancel{٩}^{٣} \times \cancel{٤}^{١}}{\cancel{٨}_{٢} \times \cancel{٣}_{١}} = \frac{٣}{٢}$

س = ٤

ص = ٣

معادلة المماس:

ص − ص$_١$ = م مماس (س − س$_١$)

$ص - ٣ = \frac{٣}{٢} (س - ٤)$

$ص - ٣ = \frac{٣}{٢} س - ٦$

$ص = \frac{٣}{٢} س - ٣$ معادلة المماس.

ميل العامودي $= \frac{-١}{م_{المماس}} = \frac{-١}{\frac{٣}{٢}} = \frac{-٢}{٣}$

معادلة العامودي:

$ص - ٣ = \frac{-٢}{٣} (س - ٤)$

لكن $\frac{٨}{٣} + \frac{٣}{١} = \frac{٨ + ٩}{٣} = \frac{١٧}{٣}$

$$ص - ٣ = -\frac{٢}{٣} س + \frac{٨}{٣}$$

$$ص = -\frac{٢}{٣} س + \frac{٨}{٣} + \frac{٣}{١}$$

$$\therefore ص = -\frac{٢}{٣} + \frac{١٧}{٣}$$ معادلة العامودي عليه عند نقطة التماس

مثال (١٨):

ما نوع كل من القطوع المخروطية التي معادلة منحناه:

(i) $س^٢ + ٤ ص^٢ = ٤$

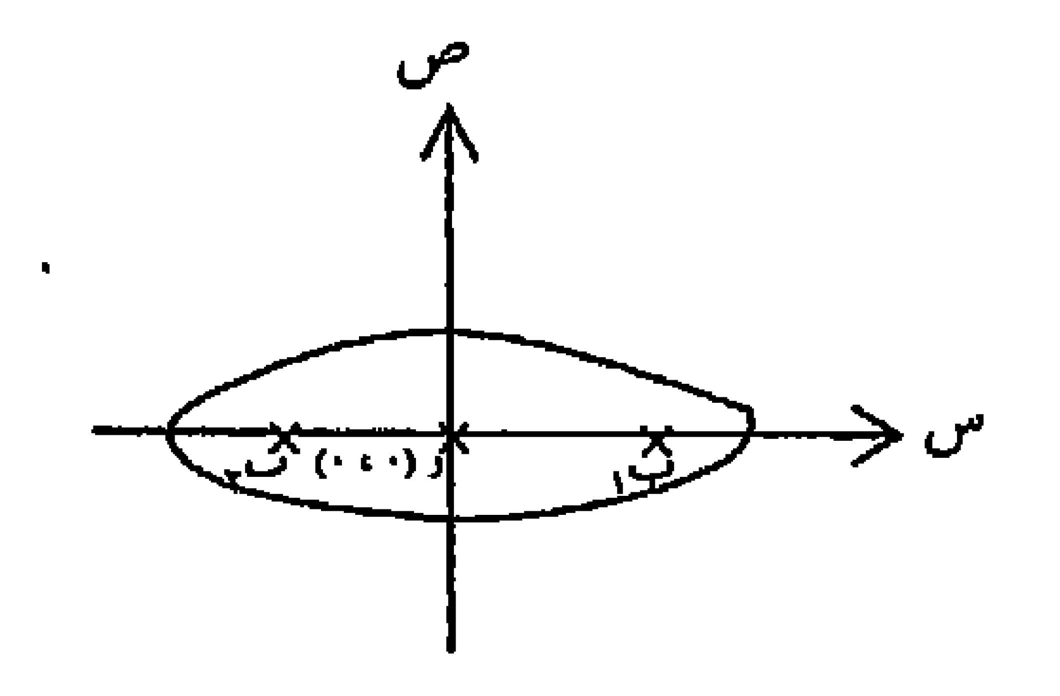
الحل:

تقسم المعادلة على ٤

$$\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{١} = ١$$

انه قطع ناقص سيني مركزه نقطة الأصل

وتمثيله البياني كان في الشكل.



(ii) $س^٢ + ٣٦ = ص^٢$

$$س^٢ - ص^٢ = - ٣٦$$

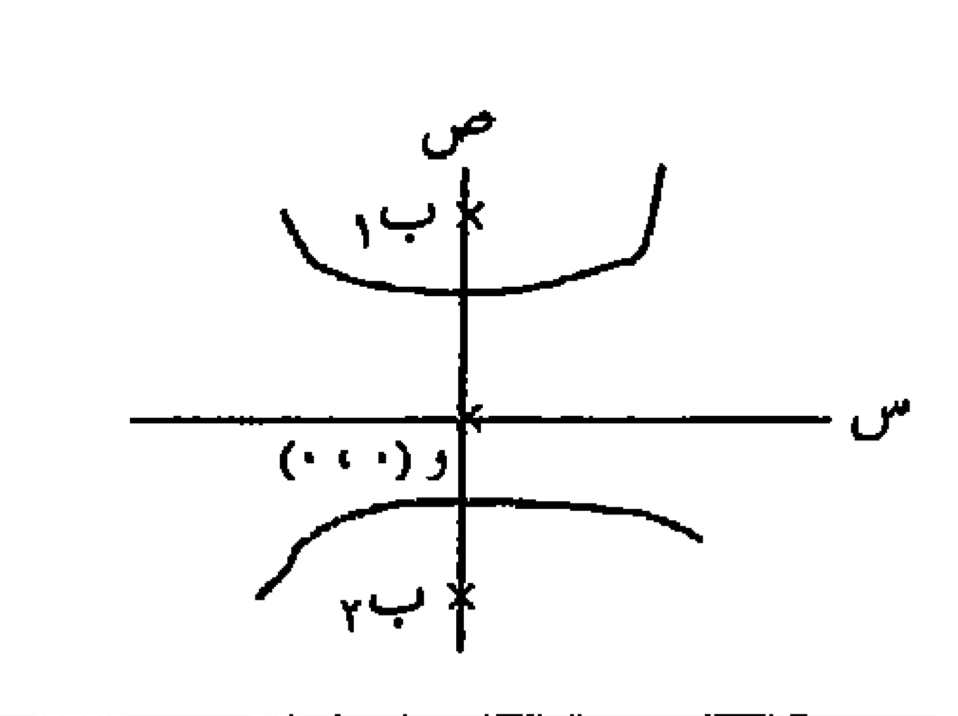
بالقسمة على - ٣٦ كما يلي

$$-\frac{س^٢}{٣٦} + \frac{ص^٢}{٣٦} = ١$$

$$\frac{ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٣٦} = ١$$

انه قطع زائد صادي مركزه نقطة الأصل

وتمثيله البياني كما في الشكل.



(iii) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٦ ص - ٢ = صفر$

باكمال المربعين:

$(س^{٢} - ٢ س) + (ص^{٢} + ٦ ص) = ٢$

باضافة مربع نصف معامل المتغير الى كل طرف

$(س^{٢} - ٢ س + ١^{٢}) + (ص^{٢} + ٦ ص + ٣^{٢}) = ٢ + ١^{٢} + ٣^{٢}$

$(س - ١)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٢$

انه دائرة مركزها م (١ ، - ٣) و نصف قطرها

$نق = \sqrt{١٢}$

$= ٢\sqrt{٣}$

وتمثيلها البياني كما في الشكل:

(iv) $ص^{٢} - ٦ س + ٤ ص - ١٢ = صفر$

نرتبه:

$ص^{٢} + ٤ ص = ٦ س + ١٢$

باكمال المربع: اضافة مربع نصف معامل ص للطرفين:

$ص^{٢} + ٤ ص + ٢^{٢} = ٦ س + ١٢ + ٢^{٢}$

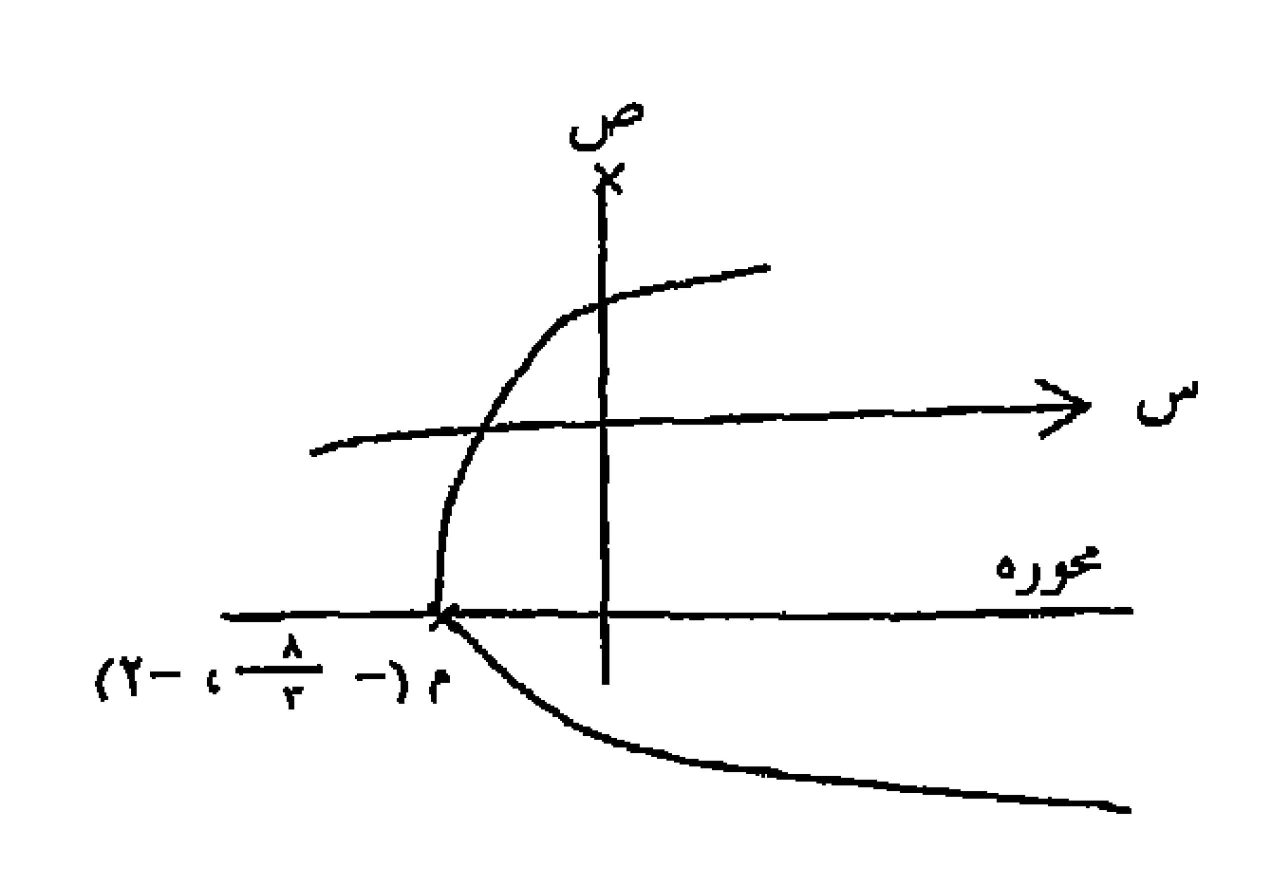
$(ص + ٢)^{٢} = ٦ س + ١٦ = ٦ (س + \frac{٨}{٣})$

$(ص + ٢)^{٢} = ٦ (س + \frac{٨}{٣})$

انه قطع مكافئ سيني مفتوح لليمين

رأسه $(- \frac{٨}{٣} ، - ٢)$

وتمثيله البياني كما في الشكل.



مثال (٢٠):

اذا كانت المعادلتان س = قا ن ، ص = ظا ن

حيث $-\frac{\pi}{2} \leq$ ن $\leq \frac{\pi}{2}$ تحددان موقع جسيم يتحرك على منحنى في اللحظة ن ، أوجد معادلة المنحنى التي تتحرك عليه النقطة ونوعه واختلافه المركزي.

الحل:

نحاول أن نربط المتغير س بالمتغير ص باستبعاد النسبة المثلثية قا ن ، ظا ن هكذا:

بما أن س = قا ن

∴ $س^2 = قا^2$ ن ــــــــ (١)

وبما أن ص = ظا ن

∴ $ص^2 = ظا^2$ ن ــــــــ (٢)

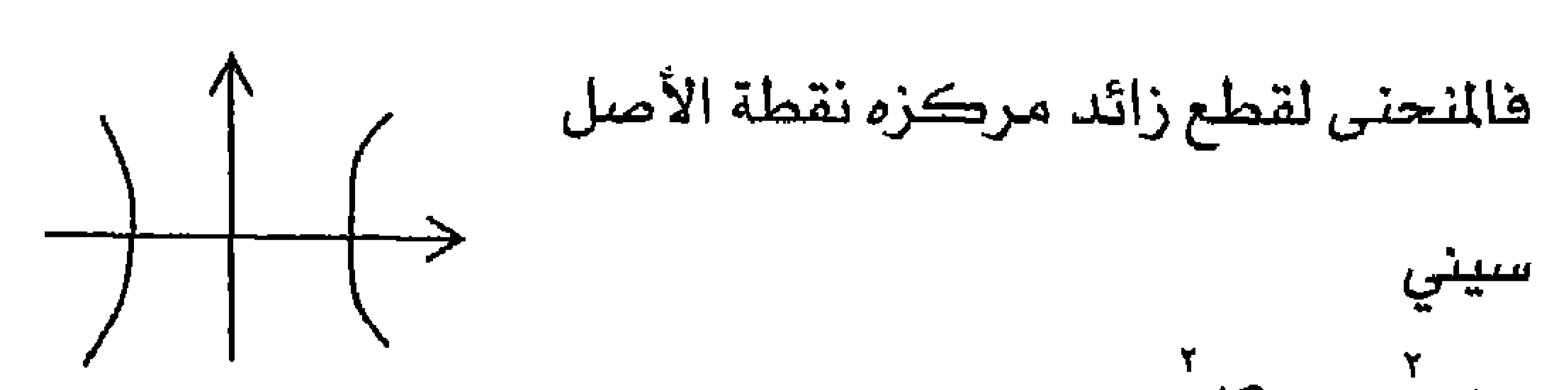
وبما أن $قا^2$ ن = $ظا^2$ ن + ١ من $\frac{جا^2 ن + جتا^2 ن = ١}{جتا^2 ن}$

$ظا^2$ ن + ١ = $قا^2$ ن

∴ $س^2 = ص^2 + ١$

$س^2 - ص^2 = ١$

فالمنحنى لقطع زائد مركزه نقطة الأصل سيني



$\frac{س^2}{١} - \frac{ص^2}{١} = ١$

$أ^2 = ١ \longrightarrow أ = ١$

$ب^2 = ١ \longrightarrow ب = ١$

$ج^2 = أ^2 + ب^2$ كونه زائد

$ج^2 = 1 + 1 = 2$

$ج = \sqrt{2}$

اختلافه المركزي $= \frac{ج}{أ} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} > 1$

مثال (٢٠):

اذا كان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ هو $هـ_1$

وكان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ هو $هـ_2$

فبيّن أن $(هـ_1)^2 + (هـ_2)^2 = 2$

الحل:

بما أن الاختلاف المركزي بشكل عام وبجمع القطوع المخروطية $= \frac{ج}{أ}$ فإن:

$هـ_1 = \frac{ج}{أ}$ لكن $ج^2 = أ^2 - ب^2$ كونه ناقص

$ج^2 = أ^2 - ب^2$

$هـ_2 = \frac{ج}{أ}$ لكن $ج^2 = أ^2 + ب^2$ كونه زائد

$ج^2 = أ^2 + ب^2$

أي أن $(هـ_1)^2 = \frac{ج^2}{أ^2}$

$(هـ_2)^2 = \frac{ج^2}{أ^2}$

$\therefore (هـ_1)^2 + (هـ_2)^2 = \frac{ج^2}{أ^2} + \frac{ج^2}{أ^2}$

$= \frac{(أ^2 - ب^2) + (أ^2 + ب^2)}{أ^2}$

$\therefore (هـ_1)^2 + (هـ_2)^2 = \frac{2أ^2}{أ^2}$

$= 2$ وهو المطلوب

(٢٣- ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) أوجد مكونات القطع المكافئ الذي معادلته:

ص^{٢} = - ٤ س

{ارشاد: استعن بالرسم= الرأس و (٠ ، ٠) ، ا لبؤرة ب (٠ ، - ١)
معادلة الدليل ص = ١ ، معادلة المحور س = صفر}

(٢) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه م (٢ ، ٠) وبؤرته ب (٠ ، ٢)

{ص = $\frac{١}{٨}$ س^{٢} - $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$}

(٣) اذا كان الاختلاف المركزي للمدار الذي يسلكه كوكب المريخ أثناء دورانه حول الشمس هو ٠,٠٩٣ تقريباً، وطول محوره الأكبر ٤٥٦ مليون كم، أوجد معادلة هذا المدار.

{$\frac{س^{٢}}{(٢٢٨)^{٢}}$ + $\frac{ص^{٢}}{(٢٢٧)^{٢}}$ = ١} ، قطع ناقص

(٤) اذا كان الاختلاف المركزي للمدار الذي تسلكه الأرض أثناء دورانها حول الشمس هو ٠,٠١٧ وطول محوره الأكبر ٢٩٩ مليون كم، أوجد معادلة هذا المدار:

{$\frac{س^{٢}}{(١٤٩,٥)^{٢}}$ + $\frac{ص^{٢}}{(١٤٩,٤٨)^{٢}}$ = ١} قطع ناقص

(٥) أوجد مكونات القطع الزائد الذي معادلته س^{٢} - $\frac{ص^{٢}}{٤}$ = ١ ثم ارسم منحناه.

{مركزه م (٠ ، ٠) ، رأساه (١ ، ٠) ، (- ١ ، ٠)

بؤرتاه ($\sqrt{٥}$ ، ٠) ، (- $\sqrt{٥}$ ، ٠) معادلة محوره القاطع ص = صفر

معادلة محوره المرافق س = صفر ، اختلافه المركزي هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{١}$ }

(٦) ما نوع القطع المخروطي الذي معادلة منحناه:

١٦ س^{٢} − ص^{٢} − ٣٢ س − ٦ ص = ٥٧ ثم ارسم منحناه.

{ زائد }

(٧) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٠ ، − ٣) ومعادلة دليله ص = ٣

{ س^{٢} = − ١٢ ص }

(٨) اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته ب (٣ ، ١) ومعادلة دليله س = ١ ثم ارسم منحناه.

{ س = $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} − $\frac{١}{٢}$ ص + $\frac{٩}{٤}$ }

(٩) أوجد مكونات القطع المكافئ الذي معادلة منحناه:

س^{٢} + ٢ س − ٦ ص − ١٧ = صفر

{رأسه (− ١ ، − ٣) ، دليله ص = − $\frac{٩}{٢}$ بؤرته (− ١ ، − $\frac{٣}{٢}$)}

(١٠) أوجد مكونات القطع الناقص الذي معادلة منحناه:

س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٨ ثم ارسم منحناه.

{مركزه م (٠ ، ٠) بؤرتاه ($\sqrt{٦}$ ، ٠) ، (−$\sqrt{٦}$ ، ٠)

رأساه ر (٢$\sqrt{٢}$ ، ٠) ، رَ (− ٢$\sqrt{٢}$ ، ٠) ، ط (٠ ، $\sqrt{٢}$) ، طَ (٠ ، − $\sqrt{٢}$)

هـ = $\frac{\sqrt{٦}}{٢\sqrt{٢}}$ }

(١١) اكتب معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه (٢ ، − ١) ، (٢ ، ٧) وطول محوره الأكبر ر رَ = ١٢

{ $\frac{(س - ٢)^{٢}}{٢٠}$ + $\frac{(ص - ٣)^{٢}}{٣٦}$ = ١ }

(١٢) ما نوع القطع المخروطي الذي معادلة منحناه:

٩ س^{٢} - ١٨ س + ٤ ص^{٢} + ١٦ ص = ١١ { ناقص }

{ ارشاد: استعن باكمال المربع }

(١٣) ما قيمة ك في معادلة القطع الناقص

$\frac{(س - ١)^{٢}}{٤} + \frac{(ص + ٢)^{٢}}{٩} = ك$ لتجعل منحناه يمر بنقطة الأصل

{ ارشاد: عوض نقطة الأصل }

(١٤) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (- ١ ، ١) ويقع مركزها على المستقيم س - ٣ ص - ١١ = صفر

{ س^{٢} + ص^{٢} - ٧ س + ٥ ص - ١٤ = صفر }

(١٥) أوجد بؤرة القطع المكافئ ص = - $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س - $\frac{٢}{٤}$

{ ($\frac{٣}{٢}$ ، - $\frac{١٥}{١٦}$) }

{ ارشاد: حول معادلته الى الصورة القياسية }

(١٦) ما احداثيات بؤرة القطع المكافئ ص^{٢} - ٤ ص + ٦ س - ١٤ = صفر

{ ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢) }

(١٧) ما احداثيات رأسي القطع الناقص الذي تمثله المعادلات:

س = ٣ جا ن ، ص = ٢ جتا ن { (± ٣ ، ٠) }

(١٨) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث التالية:

(٥ ، ٣) ، (- ٢ ، ٢) ، (- ١ ، - ٥)

{ س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٢ ص - ٢٠ = صفر }

(١٩) ما طول نصف قطر الدائرة ٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ١٦ س − ٨ ص − ٥ = صفر

{ $\frac{٥}{٢}$ }

{ ارشاد: اجعل معامل س^{٢} ، ص^{٢} وحدة واحدة أولاً }

(٢٠) ما احداثيات بؤرة القطع المكافئ ص^{٢} − ٤ ص + ٦ س − ٨ = صفر

{ ($\frac{١}{٢}$ ، ٢) }

(٢١) أوجد ميل المماس للقطع المكافئ ص^{٢} = ٨ أ س عند النقطة (٢ أ ، ٤أ)

{ ١ }

(٢٢) اذا حدث انسحاب لبيان الاقتران س^{٢} = − ٤ أ ص بمقدار وحدتين باتجاه اليمين (اتجاه محور السينات الموجب)، فما هي احداثيات بؤرته في الوضع الجديد؟

{ (٢ ، − أ) }

(٢٣) ما النسبة بين الاختلاف المركزي للقطع $\frac{س^{٢}}{٩}$ + $\frac{ص^{٢}}{٤}$ = ١

والقطع $\frac{س^{٢}}{٩}$ − $\frac{ص^{٢}}{٤}$ = ١

{ $\sqrt{٥}$: $\sqrt{١٣}$ }

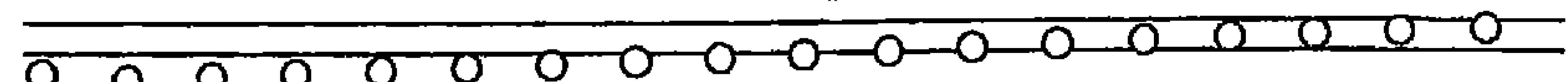
(٢٤) ما احداثيات مركز القطع الناقص:

٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} − ٤٨ س + ٧٢ ص + ١٤٤ = صفر

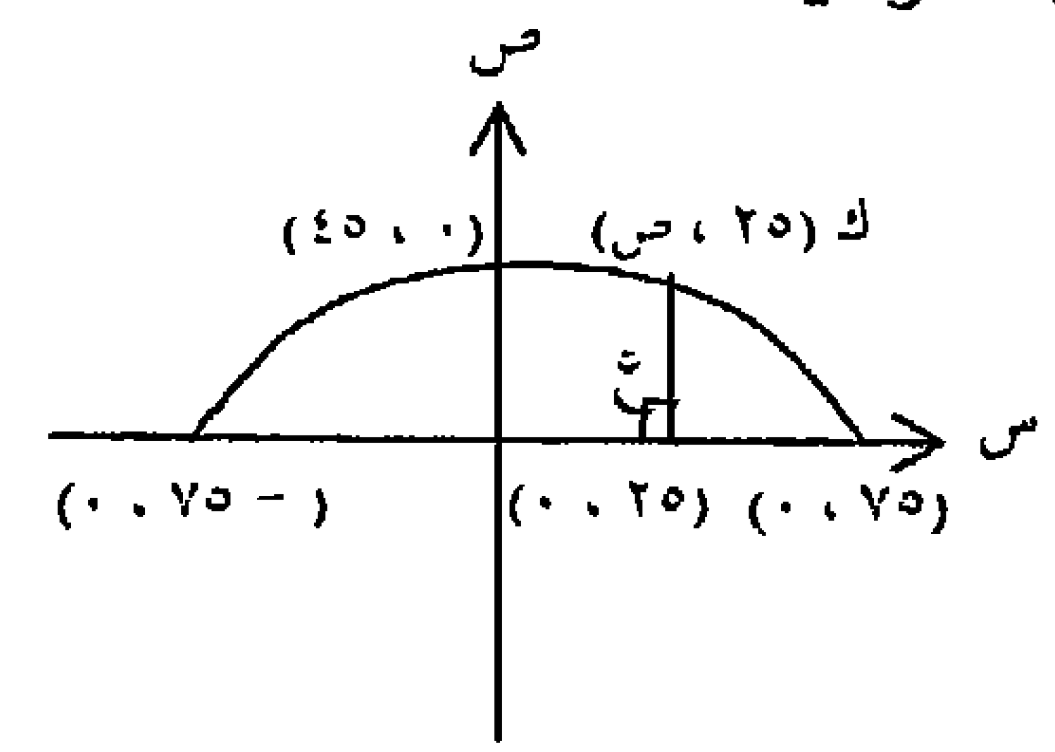
{ (٦− ، ٤) }

(٢٥) احسب طول المحور القاطع للقطع الزائد:

٩ س^{٢} = ١٦ ص^{٢} + ١٤٤ { ٨ }



(٢٦) اذا كان الشكل المجاور يمثل طريقاً قوسياً



على صورة نصف قطع ناقص فاعتماداً عليه احسب طول العامود ع لهذه الطريق.

$\{ ٣٠\sqrt{٢} \}$

{ ارشاد : أوجد معادلة القطع أولاً ثم عوض ك (٢٥ ، ص) ثانياً }

(٢٧) اكتب معادلة العامودي على مماس القطع الزائد $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$ عند رأسيه

{ ص = صفر }

(٢٨) ما قيمة هـ في معادلة الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٨ س + ١٠ ص + هـ =$ صفر علماً بأن نصف قطرها يساوي ٧ وحدات طول؟ { – ٨ }

(٢٩) ما نوع القطع المخروطي الذي معادلة منحناه:

$٩ س^٢ - ١٦ ص^٢ - ١٨ س - ٦٤ ص - ١٩٩ =$ صفر

{ زائد مركزه (١ ، – ٢) }

(٣٠) اذا كانت $٩ س^٢ - ٢٥ ص^٢ + ٢٢٥ =$ صفر تمثل معادلة قطع زائد وكانت ن (س ، ص) نقطة واقعة على منحناه، جد الفرق المطلق بين بعدي النقطة ن عن بؤرتي القطع.

{ ارشاد : طول المحور القاطع }

(٣١) عيّن نوع القطع المخروطي الممثل منحناه بالمعادلة

$٩ س^٢ - ١٦ ص^٢ - ٣٦ س + ٣٢ ص = ١٤٤$ ثم ارسمه.

(٣٢) مـا :

(١) معادلة المحور الأكبر للقطع الناقص ٢٥ ص^{٢} + ٩ (س − ٣)^{٢} = ٢٢٥

{ ص = صفر }

(٢) الاختلاف المركزي للقطع الزائد ٥ س^{٢} − ٤ ص^{٢} = ٢٠ { $\frac{٣}{٢}$ }

(٣) طول المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{س^{٢}}{٨}$ − $\frac{ص^{٢}}{٥}$ = ١ { ٤ $\sqrt{٢}$ }

(٤) بؤرتي القطع الناقص ٣ س^{٢} + ٢ ص^{٢} = ٦ { (٠ ، ± ١) }

(٥) معادلة المنحنى الممثل بالشكل المجاور

{س^{٢} = − ص + ٤}

{ ارشاد: ص = − أ س^{٢} + ب س + جـ ثم عوّض النقط الثلاث لتحصل على الصورة المناسبة لمنحنى الشكل}

(٦) معادلة المماس لمنحنى القطع المكافئ ص= $\frac{١}{٢}$ س^{٢} عند النقطة (٤ ، ٨)

{ ص = ٤ س − ٨ }

(٧) احداثيات رأس القطع المكافئ (س − ١)^{٢} + ٨ (ص + ٢) = صفر

{ (١ ، − ٢) }

(٣٣) المعادلتان س = قا ن ، ص = ظا ن حيث ٠ ≤ ن < $\frac{\pi}{٢}$ تحددان موقع الجسيم أ (س ، ص) على المنحنى في اللحظة ن .

جد معادلة المنحنى ثم بيّن نوعه وعناصره الأساسية.

{ ارشاد : استعن بالمتطابقة قا^{٢} ن = ظا^{٢} ن + ١}

(٣٤) جد معادلة العامودي على المنحنى على المماس عند النقطة (− ٢ ، ١) لمنحنى القطع الناقص س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٨

(٣٥) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها (- ١١ ، - ١١) وتمس المحورين.

(٣٦) أوجد معادلة دليل القطع المكافئ (س - ١)^{٢} - ٨ = ٤ ص {س = - ٢}

(٣٧) أوجد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) التي تتحرك في المستوى حيث بعدها عن النقطة (٤ ، - ١) دائماً يساوي بعدها عن المستقيم س - ١٠ = صفر.

{(ص + ١)^{٢} = - ١٢ (س - ٧)}

(٣٨) أوجد طول المحور الأصغر في القطع الناقص السيني الذي فيه بعد أحد رأسيه عن البؤرة القريبة له = ١ وبعده عن البؤرة البعيدة عنه = ٥

{٢$\sqrt{٥}$}

(٣٩) أوجد معادلة المحور الأصغر للقطع (٢ س + ٢)^{٢} + ٩ ص^{٢} = ٣٦

{ س = - ١ }

(٤٠) أوجد قيم م التي تجعل المعادلة $\frac{س^{٢}}{٧ - م} + \frac{ص^{٢}}{٤ - م}$ = ١ تمثل منحنى قطع زائد { م ∈ (٤، ٧) }

{ارشاد: (٧ – م) (٤ – م) < صفر}

(٤١) صنّف كل من المعادلات التالية الى أحد أنواع القطوع المخروطية، ثم مثّل منحنياتها على المستوى الديكارتي تمثيلاً صواباً:

(١) ص^{٢} - ٢ س + ٧ ص - ٥ = صفر

(٢) ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} - ٢ س - ٤ ص - ١ = صفر

(٣) ٢ س^{٢} - ٥ ص = ٣ ص^{٢} - ٤ س + ١

(٤٢) جد البعد بين بؤرتي (البعد البؤري) القطع الزائد الذي معادلته:

$$\frac{س^2}{٩} - \frac{ص^2}{٧} = ١$$

(٤٣) ما قيمة الاختلاف المركزي للقطع:

$١٦ س^2 + ٩ ص^2 - ٦٤ س + ٥٤ ص + ١ =$ صفر $\left\{\frac{\sqrt{٧}}{٤}\right\}$

(٤٤) اذا كان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ هو $هـ_1$

وكان الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ هو $هـ_2$

بيّن أن $(هـ_1)^2 + (هـ_2)^2 = ٢$

(٤٥) اكتب معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (- ١ ، ٤) ، (٠ ، - ٣) ويقع مركزها على المستقيم $س - ٢ ص = ١$

(٤٦) صنّف منحنى كل من المنحنيات التالية الى أحد القطوع المخروطية ثم ارسم المنحنى:

(١) $ص^2 + ٢ ص - س - ١ =$ صفر {قطع مكافئ سيني، مفتوح لليمين}

(٢) $٩ س^2 + ٤ ص^2 + ١٨ س = ٨ ص + ٢٣$ { قطع ناقص صادي }

(٣) $٤ س^2 - ص^2 - ١٦ س + ١٠ ص - ١٧ =$ صفر {قطع زائد سيني}

(٤٧) ما النسبة بين الاختلاف المركزي $هـ_1$ للقطع الناقص $\frac{س^2}{١٦٩} + \frac{ص^2}{١٤٤} = ١$

والاختلاف المركزي $هـ_2$ للقطع الزائد $\frac{س^2}{١٦٩} - \frac{ص^2}{١٤٤} = ١$

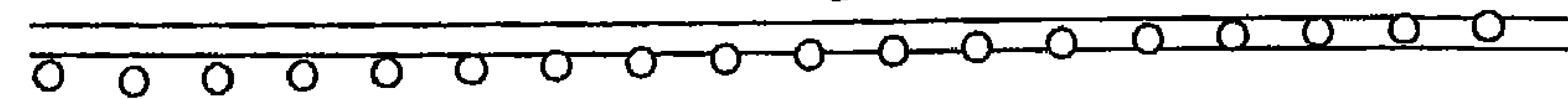
{٢٥ : ٨٨ تقريباً}

(٤٨) اكتب المعادلات التالية بالصورة القياسية لها:

(١) $٢٥ س^2 + ٧٥ ص^2 = ١٥٠$

(٢) $ص^2 - ١٠ ص = - ١٦ س - ٩$

(٣) $٢ س^2 - ٤ ص^2 = ٨$



(٤٩) اكتب معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة بشرط أن المسافة بينها وبين رأس القطع المكافئ $س^2 = ١٦ ص$ تساوي ضعف المسافة بينها وبين بؤرته.

(٥٠) أوجد قيمة أ ، ب ، جـ لكل قطع من القطوع الزائدة التالية:

حيث $جـ^2 = أ^2 + ب^2$

(١) $\frac{س^2}{٢٥} - \frac{ص^2}{٩} = ١$ $\{٥ ، ٣ ، \sqrt{٣٤}\}$

(٢) $ص^2 - س^2 = -٢$ $\{\sqrt{٢} ، \sqrt{٢} ، ٢\}$

(٣) $\frac{ص^2}{٩} - \frac{س^2}{٢٥} = ١$ $\{٣ ، ٢ ، \sqrt{١٣}\}$

(٥١) اكتب معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتان (٢ ، -٣) ، (٤ ، ١)

$\{(س - ٣)^2 + (ص + ١)^2 = ٥\}$

(٥٢) أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل لكل قطع مكافئ من القطوع المخروطية التالية:

(١) $ص^2 = \frac{١}{٢} س$

(٢) $س^2 = ٨ س - ٢ ص - ٧$

(٥٣) ما نسبة طول المحور الأكبر الى طول المحور الأصغر في القطع الناقص:

$\frac{س^2}{٨١} + \frac{ص^2}{٤٩} = ١$ $\{٧ : ٨\}$

(٥٤) أوجد مركز ونصف قطر الدائرة $س^2 + ص^2 + ٤ س - ١٤ ص + ١١ = صفر$

ثم أوجد معادلة الدائرة المتحدة معها بالمركز ونصف قطرها $\sqrt{٥٣}$

(٥٥) اكتب معادلة الدائرة التي مركزها م (- ٢ ، ٣) وتمر بالنقطة ن (٤ ، ٥)

{$س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٦ ص - ٢٧ = صفر$}

(٥٦) اذا تقاطع المماس المرسوم للقطع الناقص $٩ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٣٦$ مع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٦) أوجد احداثيات نقطة التماس.

{ ارشاد: نقطة التماس يمر بها منحنى القطع وميله عندها = ميل المماس}

(٥٧) اكتب:

(١) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٢ ، ١) ويمر منحناه بالنقطة (٤ ، ٥) ومحوره يوازي محور السينات.

(٢) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (٣ ، ١) ويمر منحناه بالنقطة (٠ ، ٥) ومحوره يوازي محور الصادات.

(٥٨) تتحرك النقطة و (س ، ص) في المستوى الديكارتي بحيث أن موضعها في اللحظة ن $\geq$ ٠ يتحدد بالمعادلتين: س = جتا ن – جا ن ، ص = جا ٢ ن

جد معادلة مسار (المحل الهندسي) للنقطة و ونوعه من القطوع المخروطية.

{ارشاد: أوجد $س^٢$ أولاً وذلك بالتربيع }

(٥٩) اكتب معادلة القطع الناقص الذي يفسر كلاً من المستقيمين:

س = ٣ ، س = ١٣ ، ص = - ١ ، ص = ٧

{ارشاد: الرسم هام جداً}

(٦٠) ما الفرق بين طولي المحورين الأكبر والأصغر للقطعين الناقصين التاليين:

(١) $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٤٤} = ١$

(٢) $\frac{(س + ٢)^٢}{١٦} + \frac{(ص - ١)^٢}{٣٦} = ١$

(٦١) اذا علمت أن مساحة القطع الناقص $\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ تُعطى بالمقدار π أ ب وحدة مساحة:

(١) ما مساحة القطع الناقص $\frac{س^٢}{٨١} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

(٢) ما معادلة القطع الناقص الذي رأساه (- ٥ ، ٠) ، (٥ ، ٠)

ومساحته = ٢٠ π وحدة مساحة.

(٦٢) اذا كان طول المحور الأكبر لقطع ناقص يساوي مثلي طول محوره الأصغر، احسب قيمة اختلافه المركزي "هـ"

(٦٣) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٢ ، - ٣) وأحد رأسيه (٥ ، - ٣) واختلافه المركزي هـ = ٢ وارسم منحناه أيضاً.

(٦٤) أوجد عناصر القطع الزائد ٤ س^٢ – ص^٢ + ١٦ س + ١٠ ص - ١٧ = صفر

(٦٥) ما النسبة بين البعد البؤري والمحور القاطع لكل من القطعين الزائدين التاليين:

(١) $\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{١٤٤} = ١$

(٢) $\frac{(س + ٤)^٢}{٨١} - \frac{(ص - ٥)^٢}{٢٥} = ١$

(٦٦) تتحرك نقطة ن (س ، ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين:

س = جا هـ + جتا هـ ، ص = ٢ $\sqrt{جا هـ جتا هـ}$ حيث هـ زاوية متغيرة بيّن أن النقطة ن تتحرك على منحنى قطع زائد.

{ارشاد: ربّع ثم عوّض}

(٦٧) أوجد:

(١) نصف قطر الدائرة $س^٢ + ص^٢ + ٤ س + ٦ ص - ١٢ = صفر$

(٢) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) وبؤرته (٢ ، ٠)

(٣) معادلة دليل القطع المكافئ $ص^٢ - ٤ س - ٤ = صفر$

(٤) الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{س^٢}{١٤٤} + \frac{ص^٢}{١٦٩} = ١$

(٥) بؤرتي القطع الناقص $٣ س^٢ + ٢ ص^٢ = ٦$

(٦) احداثيي رأس القطع المكافئ $(س - ١)^٢ + ٨ (ص + ٢) = صفر$

(٦٨) أي من المعادلات التالية تمثل دائرة؟ وكم نصف قطرها؟

(١) $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

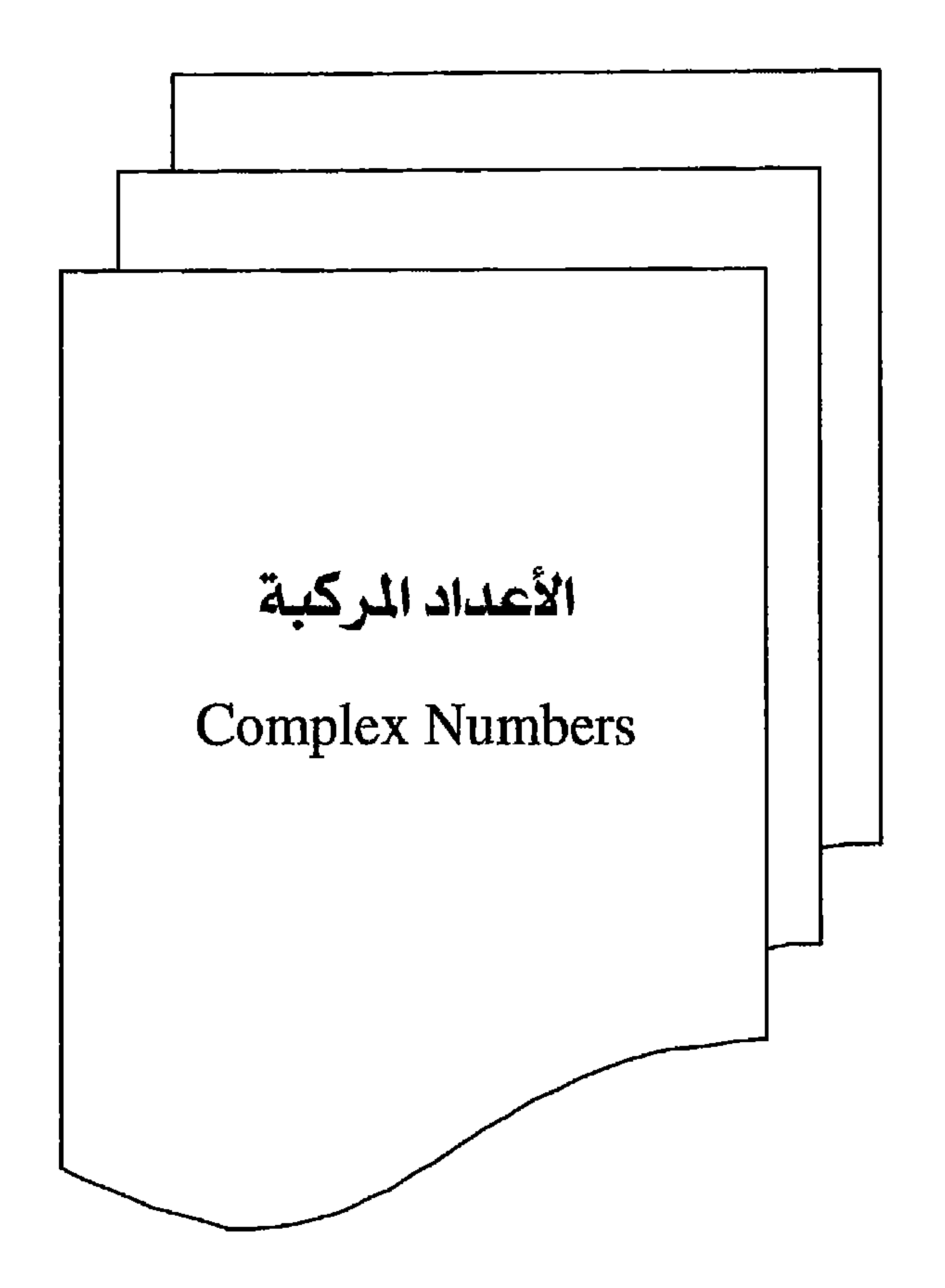
(٢) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

(٣) $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$

(٦٩) أوجد:

(١) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٥ ، - ٣)

(٢) معادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، - ٣) وتمر بنقطة الأصل.



الأعداد المركبة

Complex Numbers

من المعلوم وفي حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ×) أن:

$\sqrt{١} = ١$ ، حيث ١ ∋ ح

$\sqrt{٤} = ٢$ ، حيث ٢ ∋ ح

$\sqrt{٩} = ٣$ ، حيث ٣ ∋ ح

وهكذا..

والآن لو طرحنا هذا السؤال:

ما قيمة كل من $\sqrt{-١}$ ، $\sqrt{-٤}$ ، $\sqrt{-٩}$ ، ... ؟

لما استطاعت مجموعة الأعداد الحقيقية ح أن تزودنا بالجواب، كونها لا تضم مثل هذا الأعداد، لذا فنحن بحاجة ماسة للتعرف على مجموعة أخرى من الأعداد "تسمى الأعداد المركبة" لأنها هي التي تستطيع أن تجيب عن سؤالنا السابق.

ومن خلال السياق:

(٢٤ - ١) العدد المركب Complex Number:

سنلقي الضوء مرة أخرى على المعادلات التربيعية وعلى صورتها العامة:

أ $س^٢$ + ب س + جـ = صفر، أ ≠ صفر بالذات، كونها مدخلاً مناسباً لدراسة ومناقشة العدد المركب وخصائصه كما يظهر في هذا البيان:

ان مميز المعادلة التربيعية (أ $س^٢$ + ب س + جـ = صفر) يكتب على الصورة $ب^٢$ - ٤ أ جـ فإما أن يكون أكبر من أو يساوي الصفر، وبالرموز $ب^٢$ - ٤ أ جـ ≥ صفر، عندها يوجد للمعادلة جذران حقيقيان في حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ×) مختلفان عندما $ب^٢$ - ٤ أ جـ > صفر ومتساويان عندما $ب^٢$ - ٤ أ جـ = صفر وكأنهما جذر واحد هكذا:

يمكن ايجادهما بواسطة القانون العام لحل المعادلات التربيعية:

$$\text{حيث: } س = \left\{ \frac{- ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{- ب + \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ} ، \frac{- ب - \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ} \right\}$$

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التربيعية $س^2 - ١ = صفر$

نجد المميز أولاً:

وبما أن $أ س^2 + ب س + جـ = صفر \Leftrightarrow ١ س^2 - ٠ س - ١ = صفر$

فإن أ = ١ معامل $س^2$

ب = ٠ معامل س كونها غير موجودة بالمعادلة

جـ = - ١

$ب^2 - ٤ أ جـ = (٠)^2 - (٤) (١) (- ١) = ٤$

$$\therefore س^2 = \frac{صفر \pm \sqrt{٤}}{٢} = \frac{\pm ٢}{٢} = - ١ ، ١$$

مجموعة الحل للمعادلة = {- ١ ، ١} والجذران حقيقيان

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التربيعية $س^2 - ٦ س + ٩ = صفر$

نجد المميز أولاً: حيث أ = ١

ب = - ٦

جـ = ٩

$ب^2 - ٤ أ جـ = (- ٦)^2 - ٤ (١) (٩) = ٣٦ - ٣٦ = صفر$

مجموعة الحل للمعادلة:

س = $\frac{٦ \pm \sqrt{٠}}{٢}$ = ٣ جذر حقيقي مكرر وكأنه جذران متساويان.

وأما عندما يكون المميز ب^٢ - ٤ أ جـ < صفر عندها يكون للمعادلة جذران ولكن غير حقيقيان وكأنه لا يوجد لهما في حقل الأعداد الحقيقية حل. كما في المثال:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلة التربيعية س^٢ + ١ = صفر

نجد المميز أولاً: حيث أ = ١

ب = صفر كون س غير موجودة بالمعادلة

جـ = ١

∴ ب^٢ - ٤ أ جـ = (صفر)^٢ - ٤ × ١ × ١ = - ٤

وباستخدام قانون حل المعادلات التربيعية العام:

س = $\frac{- ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ = $\frac{صفر \pm \sqrt{- ٤}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{- ٤}}{٢}$

وبما أن $\sqrt{- ٤}$ ليس عدد حقيقي لذا فإن مجموعة الحل للمعادلة س^٢ + ١ = صفر في حقل الأعداد الحقيقية هو { } = ϕ أي لا يوجد لها حل في حقل الأعداد الحقيقية.

لذا كان لا بُد من ايجاد أعداد مجموعة عددية أخرى أكبر اتساعاً من ح لتستوعب أعداداً أخرى غير موجودة في ح مثل $\sqrt{- ٤}$ في المثال وبشكل عام $\sqrt{أ}$ ، أ ∋ حَ.

فكانت مجموعة الأعداد المركبة ع وكان حقل الأعداد المركبة (ع ، + ، ×) والذي نحن بصدد دراسة هذه الأعداد وهذا الحقل ومناقشته في هذه السطور.

بما أن $\sqrt{-1}$ ليس عدد حقيقي كونه لا يوجد عدد في حقل الأعداد الحقيقية مربعه = - ١.

لذلك سنرمز للعدد $\sqrt{-1}$ بالرمز ت ويسمى العدد التخيلي، وهذا العدد ت بالذات هو اللبنة الأساسية في بناء مجموعة الأعداد المركبة ع ، وتشييد حقل الأعداد المركبة (ع ، + ، ×) كما سترى!!!

لنبدأ بالعدد ت = $\sqrt{-1}$ انه يحقق المعادلة التالية:

ت^2 = - ١ بعد تربيع الطرفين، ونعيد ونكرر كثيراً قولنا بأن ت ليس عدد حقيقي على الاطلاق، ومع ذلك فإنه يحقق بعض خواص الأعداد الحقيقية كما سنرى بعد قليل.

ولنناقش قوى ت كما يلي:

(ت)^{٠} = ١ حسب قوانين الأسس وهذا عدد حقيقي

(ت)^{١} = ت وهذا عدد تخيلي

(ت)^{٢} = ($\sqrt{-١}$)^{٢} = - ١ وهذا عدد حقيقي

(ت)^{٣} = (ت^{٢}) (ت) = - ١ ت وهذا عدد تخيلي

(ت)^{٤} = (ت^{٢}) (ت^{٢}) = (- ١) (- ١) = ١ بدأ تكرار العدد ١ "وهذا عدد حقيقي

= (ت)^{٠}

(ت)^{٥} = (ت)^{٤} (ت) = (١) (ت) = ت بدأ تكرار العدد ت وهذا عدد تخيلي

وهكذا...

وكأن: (ت)^{٠} = (ت)^{٤} = (ت)^{٨} = (ت)^{١٢} = ...

وكذلك: (ت)^{١} = (ت)^{٥} = (ت)^{٩} = (ت)^{١٣} = ...

وكذلك: (ت)^{٢} = (ت)^{٦} = (ت)^{١٠} = (ت)^{١٤} = ...

ثم كذلك: (ت)^{٣} = (ت)^{٧} = (ت)^{١١} = (ت)^{١٥} = ...

وكأن قوى ت انقسمت الى أربعة صفوف للتكافؤ كما في الأعداد الحقيقية وأنتجت أعداداً حقيقية مثل ١ ، - ١ وأعداد تخيلية مثل ت ، - ت

لذا فإن كلاً من قوى ت ينتج عنصراً واحداً من عناصر المجموعة {١ ، ت ، - ١ ، - ت} حسب القانون التالي: (ت)$^{٤ن+ر}$ = ت^{ر} حيث ن ∋ ص، ر = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} فقط.

وعملية البيان تتم اجرائياً بأن تقسم قوة ت على ٤ ومهما كانت قوة ت فإن الجواب دائماً يساوي ت^{ر} حيث ر هو باقي القسمة كما يلي:

أوجد: (ت)^{٥٦} = (ت)^{٠} = ١

(ت)^{١٢٥٣} = (ت)^{١} = ت

(ت)^{١٢٢١} = (ت)^{٢} = − ١

(ت)^{٤٠٣} = ت^{٣} = − ت

ويمكن اختصار القسمة هكذا:

(ت)^{٧٤٣} = ت$^{٤(١٨٥)}$ × ت^{٣} = (ت^{٤})^{١٨٥} × ت^{٣}

= (١)^{١٨٥} × ت^{٣} = ١ × ت^{٣} = ت^{٣} = − ت

وكذلك (ت)^{٢٠٠٠} = ت$^{٦(٥٠)}$ × ت٠ = (١)^{٥٠} × ت^{٠} = ١ وهكذا.....

وهكذا فإننا نرى أن قوى ت غريبة حيث تعطي تارة عدداً حقيقياً {− ١ ، ١} وتارة عدداً تخيلياً {− ت ، ت}.

من الملاحظ أن النظام الرياضي {١ ، ت ، − ١ ، − ت} ، *) زمرة تبديلية هكذا:

×	١	ت	− ١	− ت
١	١	ت	− ١	− ت
ت	ت	− ١	− ت	١
−١	− ١	− ت	١	ت
− ت	− ت	١	ت	− ١

والعنصر المحايد للزمرة هو العدد "١"

وتبديلية لأن ت × ١ = ١ × ت = ت

(ت) (− ت) = (− ت) (ت) = − ت^{٢} = ١ وهكذا..

وليس هذا فحسب، بل ان العدد ت = $\sqrt{-\ ١}$ مكّن من كتابة كل جذر تربيعي لعدد حقيقي سالب بدلالة ت هكذا:

$\sqrt{-٤} = \sqrt{٤ \times (-١)} = \sqrt{٤}\ \sqrt{-١} = ٢$ ت

وكذلك $\sqrt{-٩} = \sqrt{٩ \times (-١)} = \sqrt{٩}\ \sqrt{-١} = ٣$ ت

وبصورة عامة اذا كان أ $\leq$ صفر فإن $\sqrt{-أ} = \sqrt{أ}$ ت

(موجب) (سالب)

والتفسير اللغوي: $\sqrt{}$ العدد الحقيقي السالب $= \sqrt{}$ العدد الحقيقي الموجب × ت

ومثال:

$\sqrt{-١٦} = \sqrt{١٦ \times -١} = \sqrt{١٦}\ \sqrt{-١} = ٤$ ت

وكذلك $\sqrt{-٢٥} = \sqrt{٢٥}$ ت $= ٥$ ت وهكذا:

والآن نعرّف العدد المركب:

العدد المركب ع هو عدد على الصورة أ + ب ت حيث أ ، ب $\in$ ح

ويسمى "أ" الجزء الحقيقي للعدد المركب ع .

ويسمى "ب" الجزء التخيلي للعدد المركب ع .

وبناء على هذا التعريف فإن جميع الأعداد التالية هي أعداد مركبة يمكن كتابتهاعلى الصورة أ + ب ت هكذا:

فالعدد الطبيعي ٥ هو عدد مركب كونه ٥ + ٠ ت

والعدد الكلي صفر هو عدد مركب كونه ٠ + ٠ ت

والعدد الصحيح - ٦ هو عدد مركب كونه - ٦ + ٠ ت

والعدد النسبي $\frac{٣}{٤}$ هو عدد مركب كونه $\frac{٣}{٤}$ + ٠ ت

والعدد الحقيقي $\sqrt{٢}$ هو عدد مركب كونه $\sqrt{٢}$ + ٠ ت

ثم العدد التخيلي ت هو عدد مركب كونه ٠ + ١ ت

وكما تلاحظ فإن جميع الأعداد في المجموعات العددية الست يمكن كتابتها على صورة ع = أ + ب ت كعدد مركب، فإذا كان ل عدد حقيقي. فإن ل = ل + ٠ ت كعدد مركب، أي أن المجموعات العددية الخمس هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد المركبة كما يمثلها ويجمعها شكل فن التالي حيث:

$ط^*$ = الأعداد الطبيعية = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...}

ط = الأعداد الكلية = {٠ ، ١ ، ٢ ، ...}

ص = الأعداد الصحيحة = {٠ ، ± ١ ، ± ٢ ، ...}

ك = الأعداد النسبية = {$\frac{أ}{ب}$ ، أ ∋ ص ، ب ∋ $ص^*$}

ح = الأعداد الحقيقية = {الأعداد النسبية وغير النسبية
مثل π ، $\sqrt{٢}$ ، ...}

ع = الأعداد المركبة = {الأعداد الحقيقية والتخيلية حيث
تمثل بالعدد أ + ب ت ، $ت^٢$ = − ١}

مثال:

اكتب الأعداد الآتية: − ٧ ، $\sqrt{-٤٩}$ ، $\sqrt{-١١}$ ، ٢ + $\sqrt{-١٦}$ على صورة أ + ب ت

الحل:

− ٧ = − ٧ + ٠ ت

$\sqrt{-٤٩} = \sqrt{٤٩ \times -١} = \sqrt{٤٩}\sqrt{-١} = ٧\sqrt{-١} = ٧ت = ٠ + ٧ت$

$\sqrt{-١١} = \sqrt{١١ \times -١} = \sqrt{١١} \times \sqrt{-١} = \sqrt{١١}ت = ٠ + \sqrt{١١}ت$

$٢ + \sqrt{-١٦} = ٢ + \sqrt{١٦ \times -١} = ٢ + \sqrt{١٦}\sqrt{-١} = ٢ + ٤ت$

(٢٤ - ٢) العمليات الرياضية على الأعداد المركبة:

وتشمل:

(i) عملية المساواة Equally في حقل الأعداد المركبة:

تتساوى الأعداد المركبة اذا تساوت الأجزاء الحقيقية فيها، والأجزاء التخيلية أيضاً.

أي أن أ + ب ت = جـ + د ت

إذاً وإذاً فقط أ = جـ (تساوي الأجزاء الحقيقية)

ب = د (تساوي الأجزاء التخيلية)

مثال:

إذا كان ٣ س + ٤ ت = ٢ + ٨ ص ت لكل س ، ص ∋ ح أوجد قيم س ، ص التي تحقق المعادلة أعلاه.

الحل:

٣ س = ٢ (تساوي الأجزاء الحقيقية)

∴ س = $\frac{٢}{٣}$

وكذلك ٤ = ٨ ص (تساوي الأجزاء التخيلية)

ص = $\frac{١}{٢}$

∴ قيم س ، ص هي {$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$}

مثال:

ما قيم س ، ص الحقيقية فيما يلي: $س^٢ - ص^٢ + ٢ س ص ت = ت$

الحل:

نضع الطرف الأيسر على صورة أ + ب ت هكذا ٠ + ١ ت

$\therefore \ (\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}) + ٢\ \text{س ص ت} = ٠ + ١\ \text{ت}$

ومن تساوي العددين المركبين ينتج أن:

$\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = \text{صفر} \qquad (١)$

$٢\ \text{س ص} = ١ \qquad (٢)$

وبحل المعادلتين هكذا: "بالتعويض مثلاً"

$٢\ \text{س ص} = ١$

$\therefore \ \text{س} = \frac{١}{٢\text{ص}}$ (س موضوع القانون)

$\therefore \ (\frac{١}{٢\text{ص}})^{٢} - \text{ص}^{٢} = \text{صفر}$

ومنها $\frac{١}{٤\ \text{ص}^{٢}} = \frac{\text{ص}^{٢}}{١}$ وبالضرب التبادلي

$٤\ \text{ص}^{٤} = ١ \longrightarrow ٤\ \text{ص}^{٤} - ١ = \text{صفر}$ (وبالتحليل)

$(٢\ \text{ص}^{٢} - ١)\ (٢\ \text{ص}^{٢} + ١) = \text{صفر}$

وبما أن ص حقيقية فإن:

أو $(\sqrt{٢}\ \text{ص} - ١)\ (\sqrt{٢}\ \text{ص} + ١)$

$\therefore \ \text{ص} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \ ، \ -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

وأما ص الحقيقية $= \frac{١}{\sqrt{٢}} \ ، \ -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\text{س} = \frac{١}{٢\text{ص}} = \frac{١}{٢\ \{\pm \frac{١}{\sqrt{٢}}\}} = \frac{١}{\pm \frac{٢}{\sqrt{٢}}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ س الحقيقية = $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

وكذلك ص الحقيقية = $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} ، -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$

(ii) جمع وطرح الأعداد المركبة:

تتم عملية جمع عددين مركبين بجمع الجزئين الحقيقيين معاً، وجمع الجزئين التخيليين معاً، وكذلك عملية الطرح تتم بطرح الجزئين الحقيقيين، وطرح الجزئين التخيليين هكذا:

(أ + ب ت) + (جـ + د ت) = (أ + جـ)+(ب + د) ت

وكذلك (أ + ب ت) – (جـ + د ت) = (أ – جـ) + (ب – د) ت

مثال:

أوجد ناتج:

(i) (٣ + ٥ ت) + (٤ – ٢ ت) = (٣ + ٤) + (٥ ت – ٢ ت)

= ٧ + ٣ ت

(ii) (٥ – ١٢ ت) – (٢ – ٤ ت) = (٥ – ٢) + (– ١٢ ت + ٤ ت)

= ٣ – ٨ ت

أو مباشرة: ٥ – ١٢ ت – ٢ + ٤ ت = ٣ – ٨ ت (بعد فك القوس الثاني)

وكذلك ٥ ت + ٣ ت = صفر + ٥ ت + صفر + ٣ ت = صفر + ٨ ت

وكذلك ٥ ت – ٣ ت = ٢ ت الطرح والجمع مباشرة أفضل.

(iii) ضرب الأعداد المركبة:

لإيجاد حاصل ضرب عددين مركبين نستخدم قانون التوزيع هكذا:

(أ + ب ت) (جـ + د ت) = أ (جـ + د ت) + ب ت (جـ + د ت)

= أ جـ + أ د ت + ب جـ ت + ب د ت^{٢}

ولما كانت ت^{٢} = - ١

فإن حاصل الضرب = أ جـ + أ د ت + ب جـ ت + ب د (- ١)

= (أ جـ - ب د) + (أ د + ب جـ) (لا داعي حفظ القانون بل ايجاده هكذا):

مثال:

ما حاصل ضرب (٣ + ٢ ت) (٢ – جـ ت) وعلى صورة أ + ب ت

بقانون التوزيع: (٣ + ٢ ت) (٢ - ٥ ت)

= ٣ (٢ – ٥ ت) + ٢ ت (٢ – ٥ ت)

= ٦ – ١٥ ت + ٤ ت - ١٠ ت^{٢}

= ٦ - ١٥ ت + ٤ ت + ١٠

= ١٦ - ١١ ت

مثال:

أوجد (١ + ت)^{٢} وبصورة أ + ب ت

الحل:

(١ + ت)^{٢} = (١ + ت) (١ + ت) كحاصل ضرب عددين مركبين

= ١ (١ + ت) + ت (١ + ت)

= ١ + ت + ت + ت^{٢}

= ١ + ٢ ت - ١

= ٢ ت

= ٠ + ٢ ت

(iv) قسمة الأعداد المركبة:

لاجراء عملية قسمة عددين مركبين نحتاج الى مناقشة بعض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالعدد المركب أ + ب ت التالية:

أولاً: المرافق Conjugate:

مرافق العدد المركب ع ويرمز له بالاشارة $\bar{ع}$

وايجاده هكذا:

مرافق العدد المركب ع = أ + ب ت هو $\bar{ع}$ = أ — ب ت "الاختلاف بالاشارة فقط"

والعكس صواب:

أي مرافق ا لعدد المركب أ — ب ت هو العدد المركب أ + ب ت

وهناك حالات خاصة للمرافق:

مرافق العدد المركب ع = أ + ٠ ت هو $\bar{ع}$= أ — ٠ ت "وكأنه نفسه كونه الجزء الحقيقي فقط"

ومرافق العدد المركب ع = ٠ + ب ت هو $\bar{ع}$ = ٠ — ب ت "الاختلاف بالاشارة كونه الجزء التخيلي"

مثال:

اذا كان ع = ٦ — ٤ ت

أوجد $\bar{ع}$ ؟

$\bar{ع}$ = ٦ + ٤ ت

مثال:

أوجد مرافق كل من الأعداد التالية:

$ع_١ = -$ ١١ الجواب: $\bar{ع}_١ = -$ ١١ نفسه

$ع_٢ = -$ ت الجواب: $\bar{ع}_٢ = +$ ت

ثانياً: المقياس Modulus

مقياس العدد المركب ع = أ + ب ت ويرمز له بالرمز |ع| = $\sqrt{أ^٢ + ب^٢}$

مثال:

$|٣ - ٤ ت| = \sqrt{٣^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$= |- ٨ ت| = |٠ - ٨ ت| = \sqrt{٠^٢ + (-٨)^٢} = \sqrt{٦٤} = ٨$

وهكذا...

ثالثاً: المقلوب Invetse

مقلوب العدد المركب ع أو نظيره الضربي = $\frac{١}{ع}$ والذي يحقق الخاصية التالية:

العدد × نظيره الضربي = ١ (العنصر المحايد لعملية الضرب)

أي: $ع \times \frac{١}{ع} = ١$

فمقلوب العدد المركب ع = أ + ب ت هو $\frac{١}{أ + ب ت}$

وحتى نكتب هذا المقلوب بصورة عدد مركب آخر، فإننا نقوم بانطاق مقامه، أي نضربه بالمرافق للمقام هكذا:

$$\frac{١}{أ + ب ت} \times \frac{أ - ب ت}{أ - ب ت} = \frac{أ - ب ت}{أ^٢ - ب^٢ ت (-١)} = \frac{أ - ب ت}{أ^٢ + ب^٢}$$

$$= \frac{أ}{أ^٢ + ب^٢} - \frac{ب}{أ^٢ + ب^٢} ت$$

مثال:

أوجد مقلوب العدد المركب ١ - ٣ ت واكتبه على صورة عدد مركب.

الحل:

$$\frac{١}{١-٣\text{ت}} \times \frac{١+٣\text{ت}}{١+٣\text{ت}} = \frac{١+٣\text{ت}}{١-٩(-١)}$$

$$= \frac{١+٣\text{ت}}{١+٩} = \frac{١+٣\text{ت}}{١٠} = \frac{١}{١٠} + \frac{٣}{١٠}\text{ت}$$

وكذلك مقلوب العدد المركب ت هو $\frac{١}{\text{ت}}$

$$\frac{١}{\text{ت}} \times \frac{-\text{ت}}{-\text{ت}} = \frac{-\text{ت}}{-(\text{ت})^{٢}} = \frac{-\text{ت}}{-(-١)} = \frac{-\text{ت}}{١} = -\text{ت}$$

والآن نعود الى كيفية اجراء عملية قسمة الأعداد المركبة هكذا:

لاجراء عملية قسمة العدد المركب $\text{ع}_{١}$ على $\text{ع}_{٢} \neq$ صفر

فإننا نضع $\frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}}$ ثم نضرب مقامه بالمرافق هكذا:

$= \frac{\text{ع}_{١}}{\text{ع}_{٢}} \times \frac{\bar{\text{ع}}_{٢}}{\bar{\text{ع}}_{٢}}$ فينتج خارج القسمة على صورة عدد مركب هكذا:

مثال:

أوجد خارج قسمة $\frac{١+\text{ت}}{١-\text{ت}}$ وضعه على صورة عدد مركب أ + ب ت.

الحل:

$$\frac{١+\text{ت}}{١-\text{ت}} \times \frac{١+\text{ت}}{١+\text{ت}} = \frac{(١+\text{ت})(١+\text{ت})}{١-\text{ت}^{٢}} = \frac{١+٢\text{ت}+\text{ت}^{٢}}{١-(-١)}$$

$$= \frac{١+٢\text{ت}-١}{٢} = \frac{٢\text{ت}}{٢} = \text{ت} = ٠ + ١\text{ت}$$

وكذلك

$$\frac{٢-\text{ت}}{٣+٤\text{ت}} \times \frac{٣-٤\text{ت}}{٣-٤\text{ت}} = \frac{(٢-\text{ت})(٣-٤\text{ت})}{٩-١٦\text{ت}^{٢}} = \frac{٦-٨\text{ت}-٣\text{ت}+٤\text{ت}^{٢}}{٩-١٦(-١)}$$

$$= \frac{٦-٤-١١\text{ت}}{٢٥} = \frac{٢}{٢٥} - \frac{١١}{٢٥}\text{ت}$$

وهكذا...

وكأن عملية قسمة العدد المركب $ع_١$ على $ع_٢$ = $ع_١ \times \frac{١}{ع_٢}$

= العدد المركب $ع_١$ × مقلوب العدد المركب $ع_٢$

وهذا التعميم لعملية القسمة في حقل الأعداد المركبة يماثل تماماً لعملية القسمة في حقل الأعداد الحقيقية.

مثال:

احسب ما يلي:

(i) مرافق العدد $-١١ - ١٣ت = \overline{-١١ - ١٣ت} = -١١ + ١٣ت$

(ii) مقياس العدد $-٥ + ١٢ت = |-٥ + ١٢ت| = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

(iii) مقلوب العدد $٦ - ٥ت = \frac{١}{٦ - ٥ت} \times \frac{٦ + ٥ت}{٦ + ٥ت} = \frac{٦ + ٥ت}{٣٦ - ٢٥ت^٢}$

$= \frac{٦ + ٥ت}{٣٦ - ٢٥} = \frac{٦ + ٥ت}{٦١} = \frac{٦}{٦١} + \frac{٥}{٦١}ت$

(٢٤ - ٣) الجذور التربيعية للأعداد المركبة:

لو عدنا الى حقل الأعداد الحقيقية وأردنا حل المعادلة التربيعية $س^٢ - أ$ = صفر حيث $أ \in ح^+$ لوجدنا أن حلها يكون:

$(س + \sqrt{أ})(س - \sqrt{أ})$ = صفر

$\therefore س = -\sqrt{أ}$ ، $س = \sqrt{أ}$

عندها نقول أن الجذور التربيعية للعدد الحقيقي الموجب أ هما $\pm\sqrt{أ}$

مثال:

$س^٢ - ٦٤$ = صفر ⟵ $(س + ٨)(س - ٨)$ = صفر

$\therefore س = -٨$ ، ٨

$\therefore$ الجذور التربيعية للعدد ٦٤ هما $\pm\sqrt{٦٤} = \pm ٨$ وهما عددان حقيقيان

وعندما $س^2$ = صفر ، أ = صفر وهو عدد حقيقي

فإن للمعادلة جذر واحد حقيقي هو صفر.

والسؤال الآن: ماذا لو كان أ $\ni$ $\bar{ح}$ ؟

مثال:

حل المعادلة: $س^2 + ٢٥ = صفر$

$س^2 = - ٢٥$

$س = \pm\sqrt{- ٢٥}$

في حقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ٠) لا يوجد جذور تربيعية للعدد السالب، وانما نقف الآن في حقل الأعداد المركبة (ع ، + ، ٠) لنجد $\pm\sqrt{- ٢٥}$ فنقول $س^2 + ٢٥$ = صفر تحلل هكذا في حقل الأعداد المركبة (ع ، + ، ٠) فقط.

$س^2 - ٢٥ ت^2$ = صفر لأن $ت^2 = - ١$

= (س - ٥ ت) (س + ٥ ت) = صفر

∴ س = ٥ ت ، - ٥ ت

فالجذور للمعادلة $س^2 + ٢٥$ = صفر هي $\pm$ ٥ ت

أي أن $\sqrt{- ٢٥} = \pm ٥$ ت

كأن $\sqrt{- ٢٥} = \sqrt{٢٥ \times - ١} = \sqrt{٢٥ ت^2} = \pm ٥$ ت

وبشكل عام اليك هذا المثال:

مثال:

أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب ع = ٨ + ٦ ت

نفرض أن $\sqrt{٨ + ٦ ت}$ = س + ص ت ، لكل س ، ص ∈ ح

وبتربيع الطرفين

$(س + ص ت)^{٢} = ٨ + ٦ ت$

$س^{٢} + ٢ س ص ت + ص^{٢} ت^{٢} = ٨ + ٦ ت$

$س^{٢} + ٢ س ص ت + ص^{٢} (- ١) = ٨ + ٦ ت$

$س^{٢} + ٢ س ص ت - ص^{٢} = ٨ + ٦ ت$ بعد التبسيط

$(س^{٢} - ص^{٢}) + ٢ س ص ت = ٨ + ٦ ت$ من المساواة

$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = ٨ \longleftarrow (١)$

$٢ س ص = ٦ \longleftarrow (٢)$ وبحل المعادلتين وايجاد قيم س ، ص الحقيقية

$س ص = ٣$

$س = \frac{٣}{ص}$

$\therefore (\frac{٣}{ص})^{٢} - ص^{٢} = ٨$

$ص^{٢} (\frac{٩}{ص^{٢}} - ص^{٢} = ٨)$

$٩ - ص^{٤} = ٨ ص^{٢}$

$ص^{٤} + ٨ ص^{٢} - ٩ = صفر$

$(ص^{٢} + ٩) (ص^{٢} - ١) = صفر$

وبما أن س ، ص حقيقتان فإن:

$ص^{٢} - ١ = صفر$

$(ص + ١) (ص - ١) = صفر$

ص = - ١ ، ١

ص = $\frac{٣}{١}$ = ٣ ، $\frac{٣}{-١}$ = - ٣

∴ س + ص ت = ٣ + ١ ت

وكذلك - ٣ - ١ ت

∴ $\sqrt{٨ + ٦ ت}$ = ± (٣ + ١ ت)

مثال:

أوجد الجذور التربيعية للعدد ت

ع = ٠ + ١ ت

(س + ص ت = $\sqrt{صفر + ١ ت}$)^{٢}

س^{٢} – ص^{٢} × ٢ س ص ت = صفر + ١ ت

∴ س^{٢} – ص^{٢} = صفر

وبحل المعادلتين وايجاد قيم س ، ص الحقيقية

٢ س ص = ١

ص = $\frac{١}{٢ س}$

س^{٢} – ($\frac{١}{٢ س}$)^{٢} = صفر

٤ س^{٢} (س^{٢} - $\frac{١}{٤ س^{٢}}$ = صفر)

٤ س^{٤} - ١ = صفر

(٢ س^{٢} - ١) (٢ س^{٢} + ١) = صفر

ولإيجاد قيم س الحقيقية نكتفي بـ:

($\sqrt{٢}$ س - ١) ($\sqrt{٢}$ س + ١) = صفر

$$س = \frac{1}{\sqrt{2}} ، -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$لكن\ ص = \frac{1}{2س} = \frac{1}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$وكذلك\ ص = \frac{-1}{2س} = \frac{-1}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{-1}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore س + ص ت = \pm (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} ت)$$

$$\therefore \sqrt{ت} = \pm (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} ت)$$

مثال:

أوجد الجذور التربيعية للعدد -100

مباشرة $\sqrt{-100} = \sqrt{100 \times -1} = \sqrt{100}\sqrt{-1} = \pm 10$ ت

(٢٤ - ٤) حل المعادلات التربيعية في حقل الأعداد المركبة:

كان للمعادلة التربيعية أ $س^2$ + ب س + جـ = صفر ، أ $\neq$ صفر ، ب ، جـ أعداد حقيقية حل أو حلان في مجموعة الأعداد الحقيقية عندما كان المميز $ب^2 - 4$ أ جـ $\geq$ صفر وكان لا يوجد لها حل في حقل الأعداد الحقيقية عندما كان المميز $ب^2 - 4$ أجـ $<$ صفر (سالب) وكانت يومذاك مجموعة الحل لها = ϕ = { } في حقل الأعداد الحقيقية فقط.

وأما الآن وبعد توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية الى مجموعة الأعداد المركبة والتي تحتويها كما في الشكل.

ع ح

فإن للمعادلة التربيعية

أ $ع^2$ + ب ع + جـ = صفر وبعد استبدال س كعدد حقيقي بـ ع كعدد مركب.

حل موجود مهما كانت اشارة المميز $ب^٢ - ٤ أ جـ$ سواء أكانت سالبة أو صفر أو موجبة كما يلي:

بإيجاز شديد ومُفيد يوجد في حقل الأعداد المركبة حلول للمعادلة التربيعية $أ ع^٢ + ب ع + جـ = صفر$ وعلى شكل أعداد مركبة، ويمكن ايجاد هذه الحلول بالقانون:

$$ع = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

لكل أ ، ب ، جـ ∋ ح ، ع ∋ مجموعة الأعداد المركبة.

ودائماً يوجد للمعادلة حلان مركبان كما يلي:

مثال:

حل المعادلة $ع^٢ + ٢ ع + ٢ = صفر$ في حقل الأعداد المركبة

الحل:

بما أن $أ ع^٢ + ب ع + جـ = صفر$

$١ ع^٢ + ٢ ع + ٢ = صفر$

∴ أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٢

$$ع = \frac{- ٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢} = \frac{- ٢ \pm \sqrt{- ٤}}{٢} = \frac{- ٢ \pm ٢ ت}{٢}$$

$= - ١ + ١ ت ، - ١ - ١ ت$

∴ مجموعة الحل للمعادلة: = {- ١ - ١ ت ، - ١ + ت}

مثال:

حل المعادلة $٢ ع^٢ + ٢ ع + ٣ = صفر$ في حقل الأعداد المركبة

بما أن أ = ٢ ، ب = ٢ ، جـ = ٣

فإن ع = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ٢ \times ٣}}{٢ \times ٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{-٢٠}}{٤} = \frac{-٢ \pm ٢\sqrt{-٥}}{٤}$

$= \frac{-١ \pm \sqrt{٥}\,ت}{٤} = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت$

فالجذران $\{-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت \text{ ، } -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت\}$

ولو تأملنا الجذرين لوجدنا:

(i) أحدهما مرافق الآخر:

أي أن $-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت$ هو مرافق $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت$ والعكس صواب.

وبشكل عام وفي حقل الأعداد المركبة بالذات اذا كان مميز المعادلة:

أ ع^{٢} + ب ع + جـ = صفر لكل أ $\neq$ صفر ، ب، جـ $\in$ ح ، أصغر من صفر (سالب) يكون الجذران مترافقان، فإذا كان س + ص ت أحد الجذرين فالجذر الآخر هو س – ص ت لكل س ، ص $\in$ ح والعكس صواب.

(ii) مجموع الجذرين $(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت) + (-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت)$

= – ١ + ٠ ت = – ١ عدد حقيقي = $-\frac{ب}{أ} = \frac{-٢}{٢} = -١$

∴ مجموع الجذرين للمعادلة أ ع^{٢} + ب ع + جـ = صفر يساوي $-\frac{ب}{أ}$

(هذه الخاصية موجودة في الأعداد الحقيقية)

وحاصل ضربهما $(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت)(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت)$ قانون التوزيع

$= -\frac{١}{٢}(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت) - \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت\,(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٥}}{٢}\,ت)$

$= \frac{١}{٤} - \frac{\sqrt{٥}}{٤}\,ت + \frac{\sqrt{٥}}{٤}\,ت - (\frac{\sqrt{٥}}{٢})^{٢}(-١)$

$= \frac{١}{٤} - (\frac{٥}{٤})(-١) = \frac{١}{٤} + \frac{٥}{٤} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢} = \frac{جـ}{أ}$

(هذه الخاصية موجودة في الأعداد الحقيقية)

من هذه الخصائص بالذات يمكن تكوين المعادلة التربيعية:

أ ع^{٢} + ب ع + جـ = صفر ذات المعاملات (أ ، ب ، جـ) الحقيقية اذا علم جذر مركب غير حقيقي فقط هكذا:

المعادلة التربيعية ع^{٢} – (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضربهما = صفر

هذه العملية تماثل تركيب المعادلة التربيعية:

"س^{٢} – (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = صفر" في حقل الأعداد الحقيقية تماماً.

مثال:

كوّن المعادلة التربيعية = أ ع^{٢} + ب ع + جـ = صفر

اذا علمت أن العدد المركب – ٢ + ٥ ت هو أحد جذورها.

الحل:

الجذر الآخر هو مرافقة – ٢ – ٥ ت

المعادلة التربيعية:

ع^{٢} – (– ٢ + ٥ت – ٢ – ٥ت) ع + (– ٢ + ٥ ت) (– ٢ – ٥ ت) = صفر

ع^{٢} + ٤ ع + (٤ – ٢٥ ت^{٢}) = صفر

ع^{٢} + ٤ ع + (٤ – ٢٥ × – ١) = صفر

ع^{٢} + ٤ ع + ٢٩ = صفر

ملحوظة:

مع أن عملية تركيب المعادلة في حقل الأعداد المركبة يماثل عملية تركيبها في حقل الأعداد الحقيقية، إلا أنه اذا كان مميز المعادلة موجباً فالجذران غير مترافقين. لذا لا يمكن تكوين المعادلة التربيعية أ ع^{٢} + ب ع + جـ = صفر بمعرفة جذر واحد.

مثال:

جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها ٢ - $\sqrt{٣}$ ت.

الحل:

الجذر الآخر ٢ + $\sqrt{٣}$ ت.

ع^{٢} – (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضربهما = صفر

ع^{٢} – (٢ + $\sqrt{٣}$ت + ٢ – $\sqrt{٣}$ت) ع + (٢ + $\sqrt{٣}$ ت) (٢ - $\sqrt{٣}$ ت) = صفر

ع^{٢} - ٤ ع + ٤ - ٣ ت^{٢} = صفر

ع^{٢} - ٤ ع + ٤ - ٣ (- ١) = صفر

ع^{٢} - ٤ ع + ٤ + ٣ = صفر

ع^{٢} - ٤ ع + ٧ = صفر

(٢٤ - ٥) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح في حقل الأعداد المركبة:

للواحد الصحيح جذور تربيعية وأخرى تكعيبية، منها الحقيقية ومنها غير الحقيقية، والتفسير كما في البيان:

أولاً الجذور التربيعية للواحد الصحيح:

هي الأعداد التي تحقق المعادلة ع^{٢} = ١ في حقل الأعداد المركبة.

أي: ع^{٢} - ١ = صفر

أو (ع - ١) (ع + ١) = صفر التحليل كفرق بين مربعين

∴ ع = ١ ، ع = - ١ الجذران التربيعيان للواحد الصحيح

∴ $\sqrt{١}$ = {- ١ ، ١} وهي أعداد حقيقية.

والجدير بالذكر أن النظام الرياضي المكون من مجموعة الجذور التربيعية للواحد الصحيح مع عملية الضرب يشكل زمرة تبديلية كما في الجدول:

×	-١	١
-١	١	-١
١	-١	١

عنصرها المحايد الواحد الصحيح نفسه

والعدد -١ نظير نفسه

والعدد ١ نظير نفسه

ولأن -١ × ١ = ١ × -١ = -١ فهي زمرة تبديلية.

ثانياً الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

هي الأعداد التي تحقق المعادلة $ع^{٣} = ١$ في حقل الأعداد المركبة.

أي $ع^{٣} - ١ = $ صفر

أو $(ع - ١)(ع^{٢} + ع + ١) = $ صفر التحليل كفرق بين مكعبين.

ومنها ع - ١ = صفر ⟵ ع = ١ الجذر التكعيبي الأول وهو عدد حقيقي (مركب أيضاً)

ومنها $ع^{٢} + ع + ١ = $ صفر وتحلل هذه المعادلة بالقانون العام لحل المعادلات ا

حيث أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ١

$$\therefore ع = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢} = \frac{-١ + \sqrt{-٣}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{٣}ت}{٢}$$

$$= -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت \quad ، \quad -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$$

أي أن الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي:

$\sqrt[3]{١} = \{١ ، -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت ، -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت\}$ (الأول مركب حقيقي، والآخران مركبان غير حقيقيين)

ومن الملاحظ أن أحد الجذرين المركبين غير الحقيقيين هو مربع للجذر الآخر هكذا:

$$(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)^٢ = -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$$

والعكس صواب:

أي أن $(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)^٢ = -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

(تأكد مما سبق عن طريق الضرب بواسطة قانون التوزيع).

لذلك لو رمزنا لأحد الجذرين المركبين بالرمز ω (أميجا) فالجذر الآخر هو $\omega^٢$

فالجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي: $\{١ ، \omega ، \omega^٢\}$

أي أن $\sqrt[3]{١} = \{١ ، \omega ، \omega^٢\}$

وبشكل عام اذا كان أ $\in$ ح فإن الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي أ هي:

$\{\sqrt[3]{أ} ، \sqrt[3]{أ}(\omega) ، \sqrt[3]{أ}(\omega^٢)\}$:

والتفسير هكذا:

$\sqrt[3]{أ} = ع$ كعدد مركب

$\therefore ع^٣ = أ$

$ع^٣ - أ = صفر$ وبتحليل المقدار كفرق بين تكعيبي عددين

$ع^٣ - (\sqrt[3]{أ})^٣ = (ع - \sqrt[3]{أ})(ع^٢ + \sqrt[3]{أ}ع + (\sqrt[3]{أ})^٢) = صفر$

ومنها $ع - \sqrt[3]{أ} = صفر \longrightarrow ع = \sqrt[3]{أ}$ الجذر المركب الحقيقي الأول

أما $ع^{2} + \sqrt[3]{أ}\, ع + \sqrt[3]{أ^{2}} =$ صفر فحلها بالقانون العام

حيث: معامل $ع^{2} = أ = 1$

معامل ع = ب = $\sqrt[3]{أ}$

الحد المطلق = جـ = $\sqrt[3]{أ^{2}}$

$$\therefore ع = \frac{-\sqrt[3]{أ} \pm \sqrt{\sqrt[3]{أ^{2}} - 4 \times 1 \times \sqrt[3]{أ^{2}}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{أ} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{أ^{2}}}}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt[3]{أ} \pm \sqrt{-3}\,\sqrt[3]{أ}}{2} = \frac{\sqrt[3]{أ}\,(-1 \pm \sqrt{-3})}{2} = \frac{\sqrt[3]{أ}\,(-1 \pm \sqrt{3}\,ت)}{2}$$

$$= \sqrt[3]{أ}\left\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت \text{ ، } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت\right\} = \sqrt[3]{أ}\ (\omega \text{ ، } \omega)$$

$$= \sqrt[3]{أ}\ \omega \text{ ، } \sqrt[3]{أ}\ \omega^{2}$$

أي أن $\sqrt[3]{أ} = \{\sqrt[3]{أ} \text{ ، } \sqrt[3]{أ}\,(\omega) \text{ ، } \sqrt[3]{أ}\,(\omega^{2})\}$

مثال:

أوجد $\sqrt[3]{8}$

مباشرة مما سبق $\sqrt[3]{8} = \{\sqrt[3]{8} \text{ ، } \sqrt[3]{8}\,\omega \text{ ، } \sqrt[3]{8}\,\omega^{2}\}$ حيث $\sqrt[3]{8}$ داخل القوس كعدد مركب حقيقي = ٢

$$\therefore 8 = \{2 \text{ ، } 2\omega \text{ ، } 2\omega^{2}\}$$

واما بتكوين المعادلة:

نفرض أن $(ع = \sqrt[3]{8})^{3}$

$ع^{3} = 8 \longleftarrow ع^{3} - 8 =$ صفر والتحليل كفرق بين مكعبين

$(ع - 2)(ع^{2} + 2ع + 4) =$ صفر

ع = ٢ كعدد مركب حقيقي

وحل المعادلة $ع^{٢} + ٢ع + ٤ = صفر$ بالقانون العام

تنتج الأجوبة ٢ ، ٢ω ، $٢\omega^{٢}$ في نهاية المطاف

مثال:

$\sqrt[٣]{-١} = \sqrt[٣]{-١}\,(١ ، \omega ، \omega^{٢}) = -١\,(١ ، \omega ، \omega^{٢})$

$= \{-١ ، -\omega ، -\omega^{٢}\}$ وهكذا....

دونك الآن خصائص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح $\{١ ، \omega ، \omega^{٢}\}$

وبإيجاز شديد:

الخاصية الأولى:

(i) مجموعها جميعاً = صفر أي أن $١ + \omega + \omega^{٢} = صفر$

والبيان: $١ + \omega + \omega^{٢} = ١ + (-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت) + (-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)$

$= ١ - \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت - \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت = ١ - ١ = صفر$

والفائدة من هذه الخاصية:

$١ + \omega + \omega^{٢} = صفر$

$\therefore ١ = -\omega - \omega^{٢}$

و: $\omega = -١ - \omega^{٢}$

و: $\omega^{2} = -١ - \omega$

الخاصية الثانية:

(ii) حاصل ضربهما جميعاً = ١ ، أي أن $(١)(\omega)(\omega^{٢}) = ١$

البيان: $(1)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}ت\right)=(1)\left((-1)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\right)$

$=(1)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)=(1)(1)=1$

لكن $(1)(\omega)(\omega^2)=\omega^3$ حسب قوانين الأسس

$\therefore\ \omega^3=1$ دائماً

وهذه الخاصية بالذات مهمة جداً في الرياضيات وعلى وجه الخصوص في الأعداد المركبة وحقلها، إذ تساعد على كتابة قوى ω بأبسط صورة ممكنة حسب القاعدة التالية:

$\omega^{3ن+ر}=\omega^{ر}$ وعند اجراء هذه العملية نقسم القوة على ٣ ونضعها بالصورة:

٣ ن + ر فتكون ر هي الباقي كعدد موجب ر = {٠ ، ١ ، ٢}

كما يلي:

مثال:

اكتب القيم التالية بأبسط صورة، {واحدة من ١ ، ω ، ω^2} فقط:

(i) ω^{25}:

الحل:

$\omega^{25}=\omega^{24+1}=\omega^{3(8)+1}=\omega^{1}=\omega$

	٨
٣	٢٥
	٢٤
باقي موجب	١

(كون $\omega^{3(8)}=(\omega^3)^8=(1)^8=1$)

(ii) ω^{-58}:

الحل:

$\omega^{-58}=\omega^{3(-20)+2}=\omega^{2}$

	٢٠-
٣	٥٨-
	٦٠±
باقي موجب	٢

(كون $\omega^{3(-20)}=(\omega^3)^{-20}=(1)^{-20}=1$)

(iii) $\omega^{٢٧}$:

الحل:

$$\begin{array}{r|l} ٢٧ & ٣ \\ ٢٧ & ٩ \\ \hline ٠ & \end{array}$$

$\omega^{٢٧} = \omega^{٣(٩)+٠} = \omega^{٠} = ١$ من الأسس

(كون $\omega^{٣(٩)} = (\omega^{٣})^{٩} = (١)^{٩} = ١$)

فأبسط صورة لقوى ω هي ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ فقط كما أسلفنا.

(iii) الخاصية الثالثة:

الجذران المركبان $(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)$ ، $(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)$ غير الحقيقيين مترافقان، أحدهما مرافق الآخر كما ترى:

أي أن العدد المركب (غير الحقيقي): $-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ هو مرافق العدد المركب غير الحقيقي.

$-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$ والعكس صواب

ولا تنسى أن أحدهما يعتبر مربع الآخر، أي أن:

$(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت) = (-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)^{٢}$ والعكس صواب

وبشكل عام: للجذرين المركبين غير الحقيقيين للواحد الصحيح:

$(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)$ ، $(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)$ صفتان معاً هما:

أحدهما مرافق الآخر ، وأحدهما مربع الآخر!!!!

(iv) الخاصية الرابعة:

النظام الرياضي المكون من مجموعة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح {١ ، ω ، $\omega^{٢}$} مع عملية الضرب بشكل زمرة تبديلية والبيان كما في الجدول والتفسير التاليين:

أي أن $(\{1 ، \omega ، \omega^2\} ، \times)$ زمرة تبديلية

$\times$	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

عنصرها المحايد هو الواحد الصحيح نفسه.

والعدد ١ نظير نفسه الضربي

و: ω نظير ω^2 الضربي

و: ω^2 نظير ω الضربي

وتبديلية لأن:

$$\omega \times \omega^2 = \omega^2 \times \omega = 1$$

وكذلك $1 \times \omega = \omega \times 1 = \omega$

وكذلك $1 \times \omega^2 = \omega^2 \times 1 = \omega^2$

مثال:

أوجد حاصل ضرب $(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 + \omega^2 - \omega^4)$ بأبسط صورة.

الحل:

بما أن $\omega^4 = \omega^{3+1} = \omega$ فإن

$(1 - \omega^2 + \omega)(1 + \omega^2 - \omega) =$ وبواسطة قانون التوزيع:

$$= 1(1 + \omega^2 - \omega) - \omega^2(1 + \omega^2 - \omega) + \omega(1 + \omega^2 - \omega) =$$

$$= 1 + \omega^2 - \omega - \omega^2 - \omega^4 + \omega^3 + \omega + \omega^3 - \omega^2$$

لكن $\omega^{4} = \omega^{3+1} = \omega$ وكذلك $\omega^{3} = 1$

$\therefore = 1 - \omega + 1 + 1 - \omega^{2}$

$= 3 - \omega - \omega^{2} = 3 + \{-\omega - \omega^{2}\}$

$= 3 + 1 = 4$

{ كون $1 + \omega + \omega^{2} =$ صفر (من خصائص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

$\therefore 1 = -\omega - \omega^{2}$ }

مثال:

اكتب ما يلي بأبسط صورة ممكنة {كواحد من 1 ، ω ، ω^{2}}

(i) $\omega^{32} = \omega^{3\times 10 + 2} = (\omega^{3})^{10} \times \omega^{2} = (1)^{10}\,\omega^{2} = 1 \times \omega^{2} = \omega^{2}$

(ii) $\omega^{-8} = \omega^{3(-3) + 1} = (\omega^{3})^{-3} \times \omega^{1} = (1)^{-3} \times \omega$

$= (1)\,\omega = \omega$

$$\begin{array}{r|l} -3 & \\ -8 & 3 \\ +9 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

(iii) $\dfrac{1}{(1 + \omega)^{12}}$

الحل:

بما أن $1 + \omega + \omega^{2} =$ صفر $\longrightarrow 1 + \omega = -\omega^{2}$

$$\frac{1}{(1+\omega)^{12}} = \frac{1}{(-\omega)^{2}} = \frac{1}{\omega^{24}} = \frac{1}{\omega^{3\times 8 + 0}} = \frac{1}{(\omega^{3})^{8} \times \omega^{0}} = \frac{1}{(1)^{8} \times \omega^{0}}$$

$= \dfrac{1}{\omega^{0}}$ لكن $(\omega)^{0} = 1$ من الأسس

$\therefore = \dfrac{1}{1} = 1$

(٢٤ - ٦) حل أنظمة لمعادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة بمتغير واحد:

أنت تعلم أن المعادلة من الدرجة الثالثة بمتغير واحد صورتها العامة:

أ ع^{٣} + ب ع^{٢} + جـ ع + د = صفر

وكما تعلم أيضاً أن المعادلة من الدرجة الرابعة بمتغير واحد صورتها العامة:

أ ع^{٤} + ب ع^{٣} + جـ ع^{٢} + د ع + هـ = صفر

لكل من أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية.

و : ع عدد مركب

أي أن المعاملات يجب أن تكون حقيقية، وإيجاد مجموعة الحل لكل منها سيتم بطرق التحليل الى العوامل بأشكاله والقسمة الطويلة أو التركيبية ونظرية العوامل مع الاستفادة من الجذور التكعيبية للواحد الصحيح، وقانون حل المعادلات التربيعية العام ع = $\frac{-ب \pm \sqrt{المميز}}{٢أ}$ كما يلي:

مثال:

حل المعادلة ع^{٣} + ٨ = صفر

الحل:

بواسطة التحليل الى العوامل كمجموع مكعبين:

ع^{٣} + ٨ = (ع + ٢) (ع^{٢} - ٢ ع + ٤) = صفر

ع + ٢ = صفر ⟵ ع = - ٢ الجذر الأول للمعادلة وهو عدد مركب حقيقي.

وحل المعادلة التربيعية ع^{٢} - ٢ ع + ٤ = صفر بالقانون العام هكذا:

أ = ١ ، ب = - ٢ ، جـ = ٤

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{٢ \pm \sqrt{-١٢}}{٢أ} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٣}ت}{٢}$$

ع = $\frac{\not{٢}(١ \pm \sqrt{٣}ت)}{\not{٢}}$ = ١ ± $\sqrt{٣}$ت عددان مركبان غير حقيقيان.

مجموعة الحل للمعادلة: {- ٢ ، ١ - $\sqrt{٣}$ ت ، ١ + $\sqrt{٣}$ ت}

مثال:

حل المعادلة ع^{٣} + ٣ ع^{٢} + ع - ٥ = صفر

الحل:

نجد جذورها الحقيقية ان وجدت بواسطة نظرية العوامل هكذا:

عوامل العدد ٥ هي: - ١ ، ١ ، - ٥ ، ٥

نجد ق (١) = (١)^{٣} + ٣ (١)^{٢} + ١ - ٥ = ٥ − ٥ = صفر

∴ ١ جذر للمعادلة ومنها:

ع − ١ عامل

ولإيجاد العوامل الأخرى نقسم ع^{٣} + ٣ ع^{٢} + ع - ٥ على ع - ١ بالقسمة التركيبية:

(١)

"جمعاً وضرباً"

ع^{٣}	ع^{٢}	ع	الثابت ع^{٠}
١	٣	١	– ٥ المعاملات
↓	١	٤	٥
١	٤	٥	∴

∴ ع^{٣} + ٣ ع^{٢} + ع - ٥ = (ع - ١) (ع^{٢} + ٤ ع + ٥) = صفر

والآن نجد جذور المعادلة التربيعية ع^{٢} + ٤ ع + ٥ = صفر

بالقانون العام حيث: أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ٥

$$ع = \frac{-٤ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢} = \frac{-٤ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

$$= \frac{-٤ \pm ٢ت}{٣} = \frac{٢(-٢ \pm ت)}{٢} = -٢ \pm ت \quad \text{مركبان}$$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي: $\{١ ، -٢ - ت ، -٢ + ت\}$

مثال:

حل المعادلة $ع^{٤} - ١ =$ صفر

الحل:

أي أن $ع^{٤} = ١ \longrightarrow ع = \sqrt[٤]{١}$

فحلول المعادلة $ع^{٤} - ١ =$ صفر معناه ايجاد الجذور الرابعة والأربعة للواحد الصحيح هكذا:

$ع^{٤} - ١ =$ صفر نستخدم التحليل الى العوامل كفرق بين مربعين

$(ع^{٢} - ١)(ع^{٢} + ١) =$ صفر

$(ع - ١)(ع + ١)(ع^{٢} - (-١)) =$ صفر

$(ع - ١)(ع + ١)(ع^{٢} - ت^{٢}) =$ صفر

$(ع - ١)(ع + ١)(ع + ت)(ع - ت) =$ صفر

∴ $ع = ١ ، -١ ، ت ، -ت$

∴ مجموعة الحل للمعادلة = $\{-١ ، ١ ، -ت ، ت\}$

أي أن $\sqrt[٤]{١} = \{-١ ، ١ ، -ت ، ت\}$ والتفسير

جذران مركبان حقيقيان هما ± ١

وجذران مركبان غير حقيقيان هما $\pm ت$

ملحوظة:

نلاحظ مما سبق أن:

(i) الجذور التربيعية للواحد الصحيح أعداد حقيقية فقط أي:

$\sqrt{1} = \{-1 ، 1\}$ جذران مركبان حقيقيان

(ii) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أعداد مركبة حقيقية وغير حقيقية أي أن:

$\sqrt[3]{1} = \{1 ، -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}ت ، -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت\}$ جذر مركب حقيقي وجذران مركبان غير حقيقيان.

(iii) الجذور الرابعة للواحد الصحيح أعداد مركبة حقيقية وغير حقيقية، أي:

$\sqrt[4]{1} = \{-1 ، 1 ، -ت ، ت\}$ جذران مركبان حقيقيان وجذران مركبان غير حقيقيان.

ولن نستمر لأن هذا القدر يكفي لبيان جذور الواحد الصحيح.

مثال:

حل المعادلة $ع^4 + 2ع^2 + 1 =$ صفر

الحل:

بالتحليل الى العوامل:

$ع^4 + 2ع^2 + 1 =$ صفر

$(ع^2 + 1)(ع^2 + 1) =$ صفر

أي أن $(ع^2 - ت^2)(ع^2 - ت^2) =$ صفر

$(ع - ت)(ع + ت)(ع - ت)(ع + ت) =$ صفر

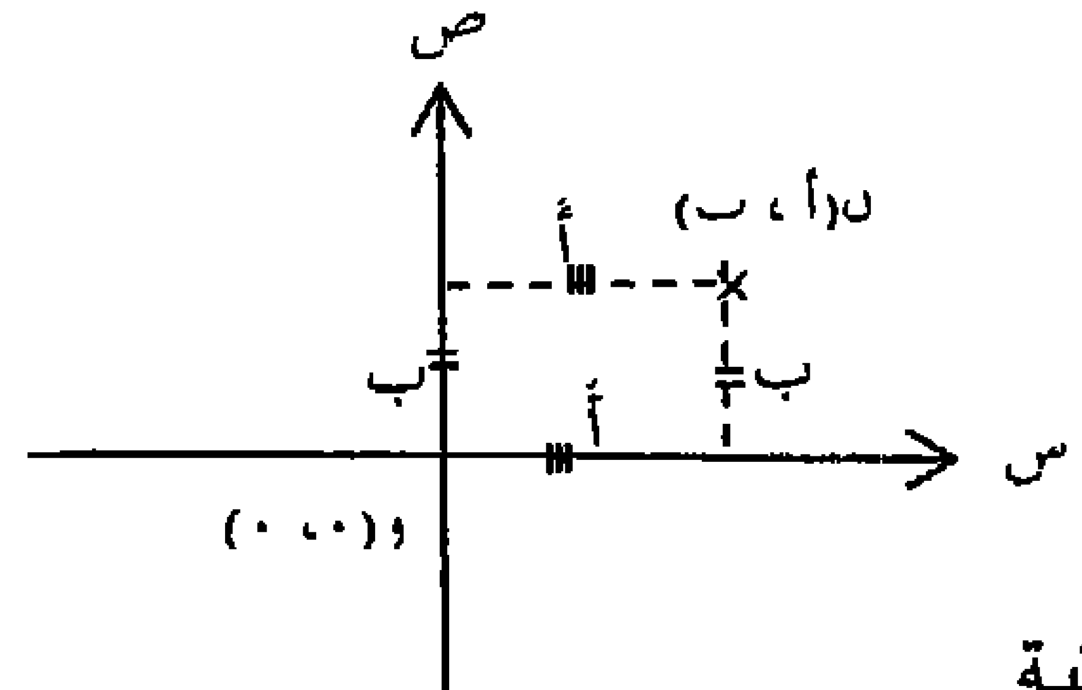
$\therefore ع = \pm ت$ جذور مكررة عددها أربعة، وجميعها مركبة غير حقيقية.

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{-ت ، ت\}$ فقط.

(٢٤ - ٧) أنظمة الاحداثيات الديكارتية والقطبية:

× **نظام الاحداثيات الديكارتية** Cartesian Coordinates System:

لا بُد أنك تعلم أن كل نقطة في المستوى الديكارتي تمثل بزوج مرتب واحد وواحد فقط على الصورة (أ ، ب) حيث يسمى العدد أ الاحداثي السيني للنقطة ن (أ ، ب) ويسمى العدد ب الاحداثي الصادي لنفس النقطة ن (أ ، ب) كما في الشكل:



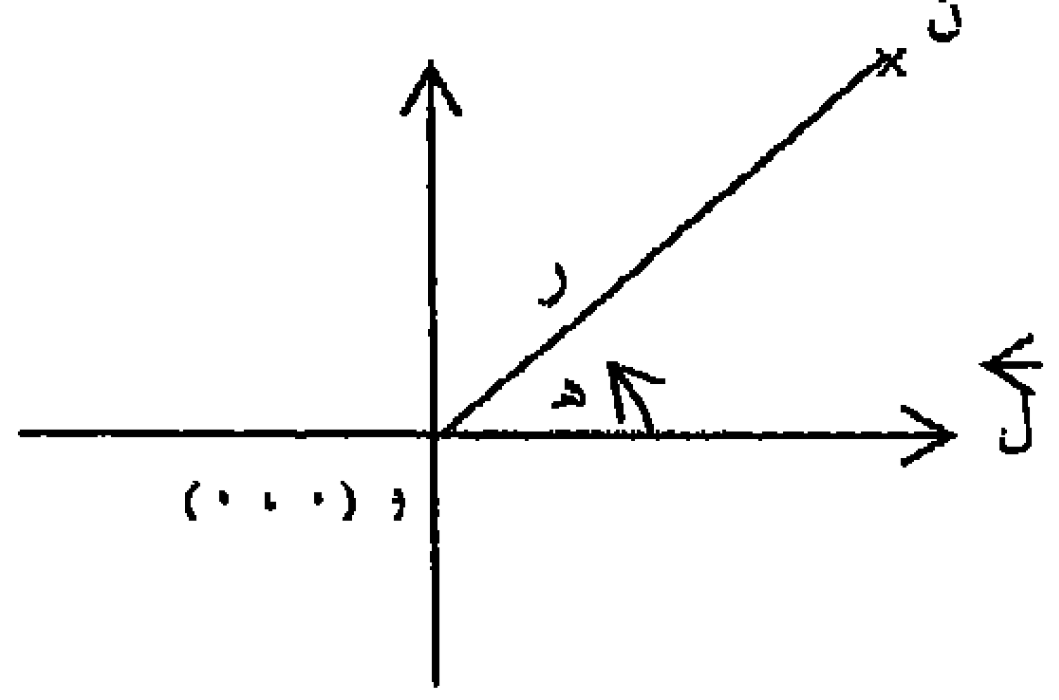
أي أن كل زوج مرتب يمثل بنقطة واحدة فقط في المستوى الديكارتي هذا النظام يسمى نظام الاحداثيات الديكارتية نسبة الى مبتكره ديكارت العام الفرنسي.

× **أما نظام الاحداثيات القطبية** Polar Coordinales System:

والذي سنتعرف عليه من خلال هذه السطور: فهو طريقة أخرى لتمثيل النقط في المستوى كما يلي:

ليكن $\overleftarrow{ل}$ شعاعاً ينطلق من نقطة ثابتة مثل و (نقطة الأصل في المستوى).

ولتكن ر هي المسافة بين النقطة و والنقطة ن والزاوية هـ هي الزاوية المحصورة بين القطعة المستقيمة و ن والشعاع $\overleftarrow{ل}$ مقاسة باتجاه عقارب الساعة (موجبة القياس) كما في الشكل.



عندها نقول أن للنقطة ن الاحداثيين القطبيين (ر ، هـ) أي تمثل النقطة ن بالزوج المرتب ن (ر ، هـ) في المستوى ويسمى الشعاع $\overleftarrow{ل}$ المحور القطبي.

وتسمى النقطة و الأصل أو القطب كما هو واضح بالشكل أعلاه.

والملاحظ أن كل زوج مرتب (ر ، هـ) يمثل بنقطة واحدة فقط في المستوى، والعكس غير صواب، فكل نقطة في المستوى يمكن تمثيلها بعدد لا نهائي من الأزواج المرتبة لأن مضاعفات الزاوية ٢ π للزاوية هـ يبقيها في مكانها ولا يغير موقعها. أي أن:

ن (ر ، هـ) ⟵ فإن ن (ر ، هـ + ٢ ك π) حيث ك ∈ ص

لأن ∢ هـ = ∢ (هـ + ٢ ك π) {كوننا نضيف دورات كاملة للزاوية هـ والتي نبقيها كما هي}

مثال:

٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ π = $\frac{\pi}{٦}$ + ٤ π ... الخ كوننا نطرح من كل منها ٢ π أو مضاعفاتها لتعود الى ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$ فقط.

ولتحويل الاحداثيات الديكارتية الى احداثيات قطبية أو العكس نحدد أولاً العلاقة بين هذه الاحداثيات وتلك كما في الشكل.

المثلث ن جـ و قائم الزاوية:

جا هـ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ن جـ}}{\text{ر}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$

∴ جا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ وبالضرب التبادلي:

ص = ر جا هـ ⟵ (١)

وبنفس الأسلوب: س = ر جتا هـ ⟵ (٢)

لكن $ر^٢ = س^٢ + ص^٢$ (نظرية فيتاغورس) ⟵ (٣)

∴
- س = ر جتا هـ
- ص = ر جا هـ
- ر = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

وهذه العلاقات الثلاث تحدد طريقة التحويل من نظام الاحداثيات الديكارتية الى نظام الاحداثيات القطبية والعكس.

مثال:

اذا كانت الاحداثيات القطبية للنقطة ن $(٤ ، \frac{\pi}{٦})$ أوجد احداثياتها الديكارتية:

الحل:

بما أن ر = ٤ ، هـ = $\frac{\pi}{٦}$

∴ س = ر جتا هـ = ٤ جتا $\frac{\pi}{٦}$ = $(٤)(\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = ٢\sqrt{٣}$

وكذلك ص = ر جا هـ = ٤ جا $\frac{\pi}{٦}$ = $(٤)(\frac{١}{٢}) = ٢$

∴ الاحداثيات الديكارتية للنقطة ن $(٢\sqrt{٣} ، ٢)$

مثال:

ما الاحداثيات القطبية للنقطة ن (٤ ، - ٤)

الحل:

بما أن س = ٤ ، ص = - ٤

فإن ر = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{(٤)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢} = ٤\sqrt{٢}$

وبما أن س = ر جتا هـ ⟵ جتا هـ = $\frac{س}{ر} = \frac{٤}{٤\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

وبما أن ص = ر جا هـ ⟵ جا هـ = $\frac{ص}{ر} = \frac{-٤}{٤\sqrt{٢}} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ ∢ هـ = ٢ π - $\frac{\pi}{٤}$

= $\frac{٧\pi}{٤}$ الزاوية كحالة خاصة

وأما ∢ هـ = $\frac{٧\pi}{٤}$ + ٢ ك π الزاوية كحالة عامة (اضافة عدد من الدورات)

الاحداثيات القطبية للنقطة ن $(٤\sqrt{٢} ،\ \frac{٧\pi}{٤} + ٢ ك \pi)$

كعدد لا نهائي من الأزواج المرتبة.

مثال:

اكتب المعادلة الديكارتية $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$ بالصورة القطبية بدلالة (ر ، هـ).

الحل:

نتخلص من س ، ص هكذا:

بما أن س = ر جتا هـ ⟵ فإن $س^{٢} = ر^{٢}$ $ص^{٢}$ هـ (١)

وبما أن ص = ر جا هـ ⟵ فإن $ص^{٢} = ر^{٢}$ $جا^{٢}$ هـ (٢)

∴ $س^{٢}$ $ص^{٢}$ = $ر^{٢}$ $جتا^{٢}$ هـ + $ر^{٢}$ $جا^{٢}$ هـ = $ر^{٢}$ ($جتا^{٢}$ هـ + $جا^{٢}$ هـ) = $ر^{٢}$ (١)

متطابقة بالمثلثات $جتا^{٢}$ هـ + $جا^{٢}$ هـ = ١

∴ $س^{٢} + ص^{٢} = ر^{٢}$

أي أن $ر^{٢} = ٩$ الصورة القطبية للمعادلة $س^{٢} + ص^{٢} = ٩$

مثال:

اكتب المعادلة القطبية $ر^{٢}$ جا ٢ هـ = ٤ بالصورة الديكارتية.

للتخلص من جتا هـ ، جا هـ نقول: (بدلالة س ، ص)

الحل:

بما أن $ر^{٢}$ جا ٢ هـ = $ر^{٢}$ (~~٢~~ جا هـ جتا هـ) = ~~٤~~ ^{٢}

∴ $ر^{٢}$ (جا هـ جتا هـ) = ٢

أي أن (ر جا هـ) (ر جتا هـ) = ٢

لكن س = ر جتا هـ ، ص = ر جا هـ

∴ س ص = ٢ بالتعويض

∴ س ص = ٢ الصورة الديكارتية للمعادلة $ر^٢$ جا ٢ هـ = ٤

مثال:

اكتب المعادلة القطبية ر = ٢ أ جا هـ بالصورة الديكارتية (بدلالة س ، ص)

الحل:

بما أن ر = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

وان ص = ر جا هـ ⟵ جا هـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{ص}{\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$

∴ $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = (٢ أ) ($\frac{ص}{\sqrt{س^٢ + ص^٢}}$) بالضرب التبادلي

$س^٢ + ص^٢$ = ٢ أ ص

$س^٢ + ص^٢$ − ٢ أ ص = صفر

أي أن $س^٢$ + ص (ص − ٢ أ) = صفر الصورة الديكارتية.

(٢٤ − ٨) المستوى المركب والصورة القطبية للعدد المركب أ + ب ت:

× **المستوى المركب** Complex Plane:

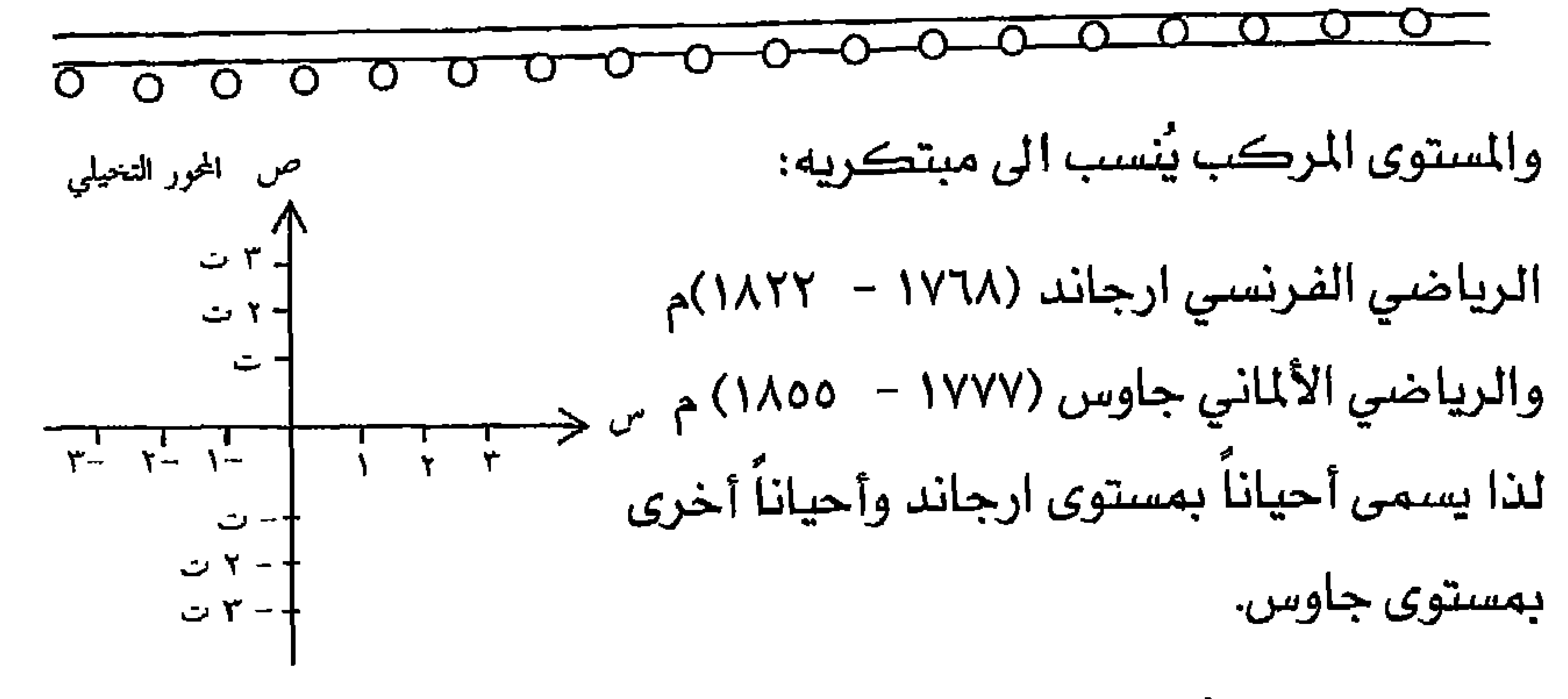
هو المستوى الذي يُمثل عليه الأعداد المركبة والتي على الصورة أ + ب ت حيث أ ، ب عددين حقيقيين، ت = $\sqrt{-١}$ عدد تخيلي، وبذلك يمكن تمثيل العدد المركب أ + ب ت بالزوج المرتب (أ ، ب) حيث أ يمثل الجزء الحقيقي للعدد المركب ألا وهو أ و ب يمثل الجزء التخيلي للعدد المركب ألا وهو ب ت وهذا لا يتم إلا على مستوى الأعداد المركبة والذي محوره السيني يمثل الجزء الحقيقي ومحوره الصادي يمثل الجزء التخيلي، وكأن المحورين أصبحا المحور السيني أو الحقيقي والمحور الصادي أو التخيلي كما في الشكل.

والمستوى المركب يُنسب الى مبتكريه:

الرياضي الفرنسي ارجاند (١٧٦٨ - ١٨٢٢)م

والرياضي الألماني جاوس (١٧٧٧ - ١٨٥٥) م

لذا يسمى أحياناً بمستوى ارجاند وأحياناً أخرى بمستوى جاوس.



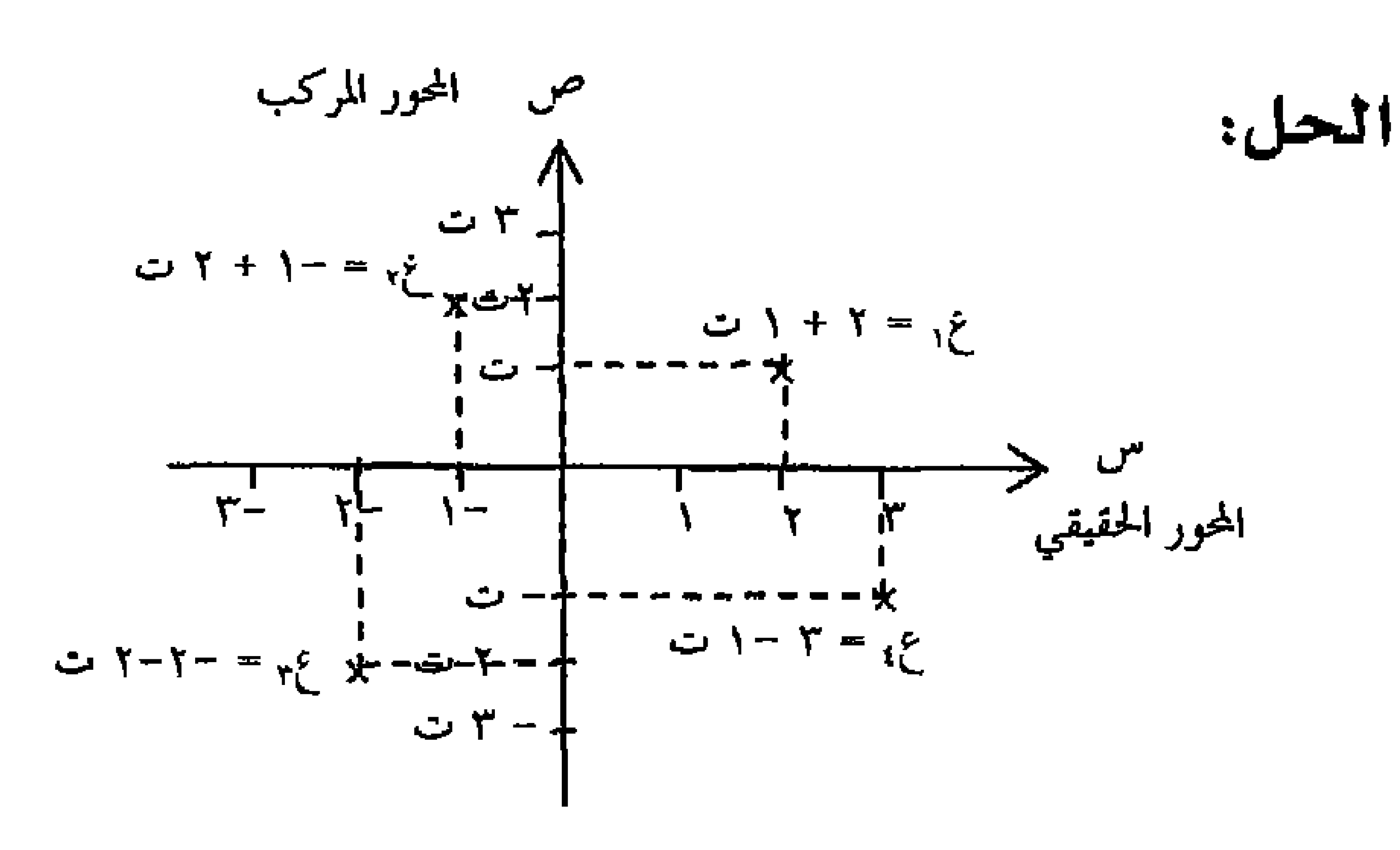
فلتمثيل الأعداد المركبة والتي على الصورة أ + ب ت نقوم برسم المستوى المركب ثم نعين عليه النقطة ن (أ ، ب ت) كما في المثال والشكل التالي:

مثال:

مثل الأعداد المركبة التالية على مستوى ارجاندا ومستوى جاوس

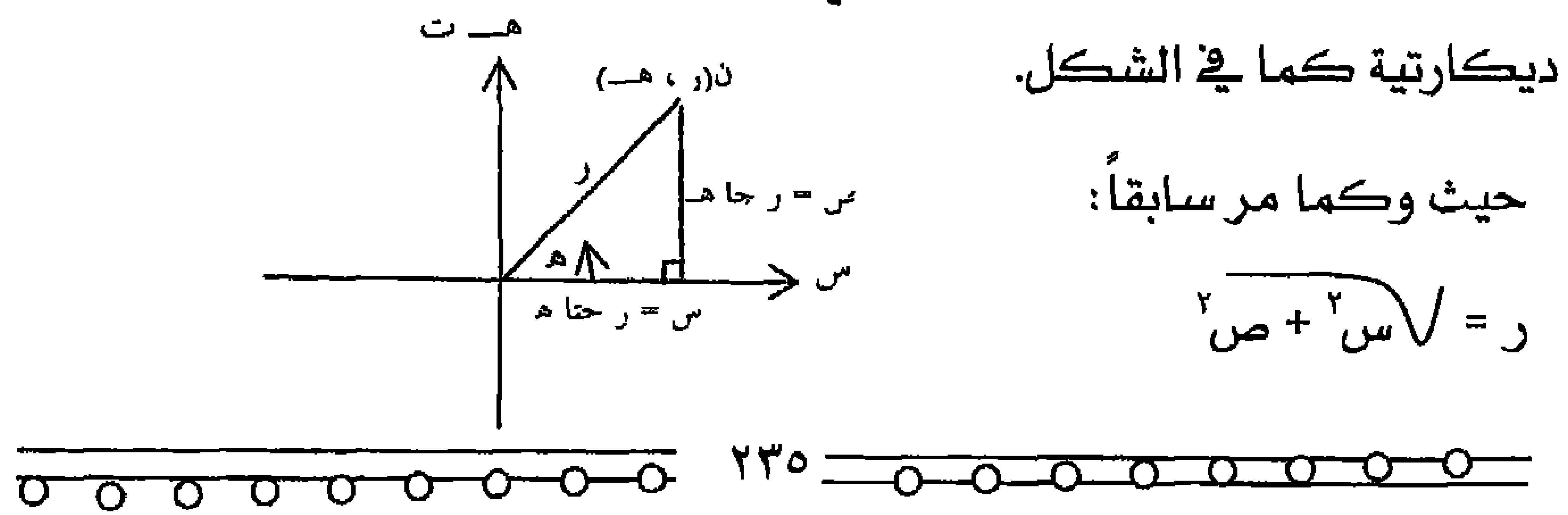
$ع_{١}$ = ٢ + ت ، $ع_{٢}$ = − ١ + ٢ت ، $ع_{٣}$ = − ٢ − ٢ت ، $ع_{٤}$ = ٣ − ١ ت

الحل:



وأما الصورة القطبية للعدد المركب ع = س + ص ت Polor form:

ان الاحداثيات القطبية للنقطة التي تمثل العدد المركب س + ص ت هي ن(ر ، هـ) كاحداثيات قطبية والتي تقابل النقطة ن (س ، ص) كاحداثيات ديكارتية كما في الشكل.



حيث وكما مر سابقاً:

$ر = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$

ويسمى مقياس العدد المركب س + ص ت = | س + ص ت | = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

وان: { س = ر جتا هـ ، ص = ر جا هـ } حيث ∠هـ تسمى سعة العدد المركب س + ص ت

فالعدد المركب ع = س + ص ت له مقياس | س + ص ت | = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

وله سعة هي ∠هـ حيث س = ر جتا هـ

ص = ر جا هـ

مثال:

احسب مقياس كل من الأعداد المركبة:

(i) $ع_1$ = - ١ + ٢ ت (ii) $ع_2$ = ٧ ت

الحل:

المقياس ر = $\sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(-١)^2 + (٢)^2} = \sqrt{٥}$

المقياس ر = $\sqrt{س^2 + ص^2} = \sqrt{(٠)^2 + (٧)^2} = \sqrt{٤٩} = ٧$

مثال:

احسب سعة كل من الأعداد المركبة التالية:

(i) $ع_1$ = ١ + ١ ت (ii) $ع_2$ = - ١ ت

الحل:

(i) نجد المقياس أولاً:

ر = $\sqrt{١^2 + ١^2} = \sqrt{٢}$

ولإيجاد هـ نحسب: جتا هـ ، جا هـ ثانياً

بما أن س = ر جتا هـ $\quad$ ١ = $\sqrt{2}$ جتا هـ $\quad$ جتا هـ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

وبما أن ص = ر جا هـ $\quad$ ١ = $\sqrt{2}$ جا هـ $\quad$ جا هـ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ ∢ هـ تقع في الربع الأول، حيث جا هـ موجب ، جتا هـ "موجب"

ومنه: ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$

∴ ∢ هـ = $\frac{\pi}{4}$ في الربع الأول

فسعة العدد الأول = $\frac{\pi}{4}$

(ii) ر = $\sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

لحساب السعة ∢ هـ: $\quad$ س = ر جتا هـ ⟵ جتا هـ = $\frac{0}{1}$ = صفر

ص = ر جا هـ ⟵ جا هـ = $\frac{-1}{1} = -1$

∴ ∢ هـ = $\frac{3\pi}{2}$ (٢٧٠°)

ولتمثيل العدد المركب ع = س + جا، ت

بالاحداثيات القطبية تمثيلاً وحيداً فإننا

نحدد سعته بالزاوية هـ ، $0 \leq$ هـ $< 2\pi$ لدورة واحدة فقط

بما أن ع = س + جا ت الصورة العامة الديكارتية (هكذا تسمى)

ولما كانت س = ر جتا هـ ، ص = ر جا هـ

فإن ع = ر جتا هـ + ر جا هـ × ت

= ر (جتا هـ + ت جا هـ) وهذه تسمى الصورة القطبية

أو التمثيل القطبي للعدد المركب س + ص ت.

مثال:

اكتب العدد المركب ع = - ٦ + ٦ ت بالصورة القطبية

الحل:

بما أن الصورة القطبية للعدد المركب ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

فإننا نجد ر = $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٣٦ + ٣٦} = \sqrt{٧٢} = ٦\sqrt{٢}$

∡هـ ω - ٦ = $٦\sqrt{٢}$ جتا هـ ← جتا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$

وكذلك ٦ = $٦\sqrt{٢}$ جا هـ ← جا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ ∡هـ تقع في الربع الثاني حيث جا هـ موجب و جتا هـ سالب

ومنه ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\frac{١}{\sqrt{٢}}}{-\frac{١}{\sqrt{٢}}} = -١$

∴ ∡هـ = $\pi - \frac{\pi}{٤} = \frac{٣\pi}{٤}$

∴ ع = $٦\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$) الصورة القطبية

والآن سنناقش كيفية اجراء عمليات "الضرب والقسمة والرفع" على الأعداد المركبة بالصورة القطبية هكذا:

اذا كان $ع_١ = ر_١$ (جتا $هـ_١$ + ت جا $هـ_١$)

$ع_٢ = ر_٢$ (جتا هـ + ت جا $هـ_٢$)

عددان مركبان وبالصورة القطبية فإن:

(i) قاعدة الضرب وبالرموز تتم كما يلي:

$ع_١ \cdot ع_٢$ = [$ر_١$ (جتا $هـ_١$ + ت جا هـ١)] [$ر_٢$ (جتا $هـ_٢$ + ت جا $هـ_٢$]

= $ر_١ ر_٢$ [جتا ($هـ_١ + هـ_٢$) + ت جا ($هـ_١ + هـ_٢$)]

"لاحظ أن المقاييس تضرب $ر_١ ر_٢$ والزوايا تجمع $هـ_١ + هـ_٢$"

كما في المثال:

مثال:

أوجد حاصل ضرب:

$$[\,2\sqrt{2}\,(جتا \frac{\pi}{4} + ت\ جا \frac{\pi}{4})\,]\,[\,2\,(جتا \frac{\pi}{2} + ت\ جا \frac{\pi}{2})\,]$$

الجواب: $(2\sqrt{2})\,(2)\,[\,جتا\,(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) + ت\ جا\,(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})\,]$

$$= 4\sqrt{2}\,[\,جتا \frac{3\pi}{4} + ت\ جا \frac{3\pi}{4}\,]$$

(ii) قاعدة القسمة وبالرموز تتم كما يلي:

$$\frac{ع_1}{ع_2} = ر_1\,(جتا\ هـ_1 + ت\ جا\ هـ_1) \div ر_2\,(جتا\ هـ_2 + ت\ جا\ هـ_2)$$

$$= [\,\frac{ر_1}{ر_2}\ (جتا\,(هـ_1 - هـ_2) + ت\ جا\,(هـ_1 - هـ_2)\,]$$

"لاحظ أن المقايس تقسم $\frac{ر_1}{ر_2}$ والزوايا تطرح $هـ_1 - هـ_2$"

كما في المثال:

مثال:

أوجد خارج قسم $[\,6\sqrt{2}\,(جتا \frac{3\pi}{4} + ت\ جا \frac{3\pi}{4})\,]$

$$\div\ [\,2\,(جتا \frac{3\pi}{4} + ت\ جا \frac{3\pi}{4})\,]$$

الجواب: $\frac{6\sqrt{2}}{2}\ [\,جتا\,(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) + ت\ جا\,(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3})\,]$

$$= 3\sqrt{2}\,[\,جتا \frac{5\pi}{12} + ت\ جا\,(\frac{5\pi}{12})\,]$$

(iii) قانون دي موافر Dem.Oivre Rule انه يرتبط بعملية الرفع وبالرموز يتم حسب قانون ينسب الى الرياضي الفرنسي دي موافر (١٦٦٧ - ١٧٥٤) م والذي ينص على:

بدلاً من الضرب المتكرر للعدد المركب بالصورة القطبية فإننا نختصر العملية هكذا:

$[ر (جتا هـ + ت جا هـ)]^{ن} = ر^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)$

لكل $ن \in ط$ ، $ن \geq ٢$

مثال:

اكتب $[٢ (جتا \frac{\pi}{٤} + ت جا \frac{\pi}{٤})]^{٣}$ كعدد مركب بالصورة القطبية

الحل:

حسب قانون دي موافر $= ٢^{٣} (جتا ٣ \times \frac{\pi}{٤} + ت جا ٣ \times \frac{\pi}{٤})$

$= ٨ (جتا \frac{٣\pi}{٤} + ت جا \frac{٣\pi}{٤})$

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو:

ماذا يُستفاد من قانون دي موافر في حقل الأعداد المركبة؟

الجواب يُستخلص من هذا المثال:

مثال:

اكتب العدد المركب $(١ + \sqrt{٣} ت)^{٥}$ بالصورة الديكارتية س + ص ت

الحل:

بما أن عملية ضرب العدد المركب $(١ + \sqrt{٣} ت)$ في نفسه ٥ مرات عملية شاقة ومعقدة وتحتاج لوقت طويل. لذا فإننا نحوله الى الصورة القطبية ونستخدم قانون دي موافر ثم نعيده الى الصورة الديكارتية هكذا:

للعدد المركب $ع = (١ + \sqrt{٣} ت)$ فإن $ر = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{١^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}} = \sqrt{٤} = ٢$

ويما أن $س = ر جتا هـ \longrightarrow جتا هـ = \frac{س}{ر} = \frac{١}{٢}$

$ص = ر جا هـ \longrightarrow جا هـ = \frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore$ ∡ هـ تقع في الربع الأول كون جيبها وجيب تمامها موجبان.

$$\therefore \text{ظا هـ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{هـ} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore (1 + \sqrt{3}\,\text{ت})^{5} = [\,2\,(\text{جتا}\,\frac{\pi}{3} + \text{ت جا}\,\frac{\pi}{3})\,]^{5}$$

وحسب قانون دي موافر:

$$= 2^{5}\,[\,(\text{جتا}\,5 \times \frac{\pi}{3} + \text{ت جا}\,5 \times \frac{\pi}{3})\,]$$

$$= 32\,[\,\text{جتا}\,\frac{5\pi}{3} + \text{ت جا}\,\frac{5\pi}{3}\,]$$

ثم نعيده الى الصورة س + ص ت هكذا:

$$\text{جتا}\,\frac{5\pi}{3} = \text{جتا}\,(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \text{جتا}\,\frac{\pi}{3}$$ كونها في الربع الرابع

$$= \frac{1}{2}$$ موجب

$$\text{جا}\,\frac{5\pi}{3} = \text{جا}\,(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\,\text{جا}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ سالب

$$\therefore (1 + \sqrt{3}\,\text{ت})^{5} = 32\,[\,\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{ت}\,] = 16 - 16\sqrt{3}\,\text{ت}$$

ومنها

$$\therefore (1 + \sqrt{3}\,\text{ت})^{5} = 16 - 16\sqrt{3}\,\text{ت}$$

"تأكد ان استطعت بالضرب المتكرر ٥ مرات

للعدد $1 + \sqrt{3}$ ت !!!!!

مثال:

اكتب $(1 - \text{ت})^{100}$ كعدد مركب على صورة أ + ب ت.

الحل:

نحوله الى الصورة القطبية:

$(1 - 1\,\text{ت}) = \text{ر}\,(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})$

حيث ر = $\sqrt{١^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٢}$

كون س = ر جتا هـ ← جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← جتا هـ $\sqrt{٢}$ = ١

كون ص = ر جا هـ ← جا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← جا هـ $\sqrt{٢}$ = -١

∴ ∢ هـ تقع في الربع الرابع

∴ ظا هـ = $\frac{-\frac{١}{\sqrt{٢}}}{\frac{١}{\sqrt{٢}}}$ = -١

∴ ∢ هـ = ٢ π - $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٧\pi}{٤}$

∴ ١ - ١ ت = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٤}$)

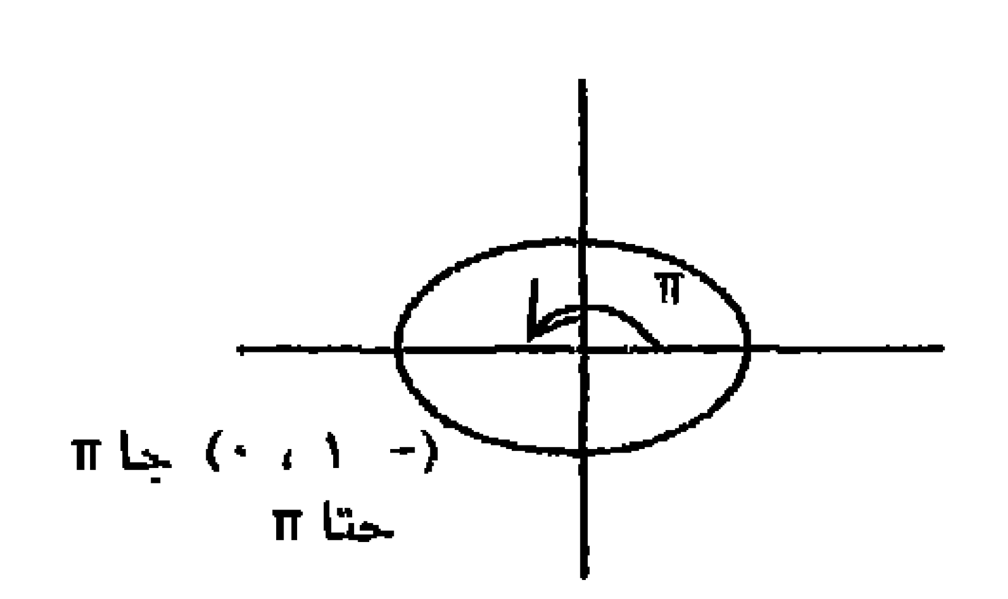
وحسب قانون دي موافر:

(١ - ١ ت)^{١٠٠} = [$\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٤}$)]^{١٠٠}

= $(\sqrt{٢})^{١٠٠}$ [جتا $\frac{٧٠٠\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٧٠٠\pi}{٤}$]

= $٢^{٥٠}$ (جتا ١٧٥ π + ت جا ١٧٥ π)

= $٢^{٥٠}$ (جتا π + ت جا π) (بعد حذف دورات كاملة كل منها ٢ π ، ١٧٤ دورة)



= $٢^{٥٠}$ (- ١ + صفر × ت)

= $٢^{٥٠}$ (- ١)

= - ($٢^{٥٠}$) + ٠ ت

(٢٤- ٩) أمثلة محلولة على الأعداد المركبة

مثال (١) :

أوجد ناتج كل من العمليات التالية في حقل الأعداد المركبة وبصورة

أ + ب ت:

(i) $(-١ - ٤\text{ت})(٢ - ٣\text{ت})$

الحل بواسطة قانون التوزيع:

$= -١(٢ - ٣\text{ت}) - ٤\text{ت}(٢ - ٣\text{ت})$

$= -٢ + ٣\text{ت} - ٨\text{ت} + ١٢\text{ت}^{٢}$

لكن $\text{ت}^{٢} = -١$

$= -٢ + ٣\text{ت} - ٨\text{ت} + ١٢(-١)$

$= -٢ - ٥\text{ت} - ١٢$

$= -١٤ - ٥\text{ت}$ وبصورة أ + ب ت

(ii) $\frac{٣ - \text{ت}}{-١ + ٢\text{ت}}$

الحل بانطاق المقام وضربه بسطاً ومقاماً بالمرافق $-١ - ٢\text{ت}$ هكذا:

$$\frac{٣ - \text{ت}}{-١ + ٢\text{ت}} = \frac{٣ - \text{ت}}{-١ + ٢\text{ت}} \times \frac{-١ - ٢\text{ت}}{-١ - ٢\text{ت}} = \frac{(٣ - \text{ت})(-١ - ٢\text{ت})}{١ - ٤\text{ت}^{٢}}$$

$$= \frac{-٣ - ٦\text{ت} + \text{ت} + ٢\text{ت}^{٢}}{١ + ٤} = \frac{-٣ - ٥\text{ت} - ٢}{٥}$$

$$= \frac{-٥ - ٥\text{ت}}{٥} = -١ - ١\text{ت}$$

(iii) (٣ - ٢ ت) + (- ٦ - ٣ ت)

الحل = ٣ - ٢ ت - ٦ - ٣ ت

= ٣ - ٦ - ٢ ت - ٣ ت

= - ٣ - ٥ ت

(iv) (٣ + ٥ ت) — (٢ - ٣ ت)

الحل = ٣ + ٥ ت - ٢ + ٣ ت

= ٣ - ٢ + ٥ ت + ٣ ت

= ١ + ٨ ت

مثال (٢):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة ع^{٤} + ٣ ع^{٢} - ٤ = صفر في حقل الأعداد المركبة.

الحل:

تحليل الى العوامل:

ع^{٤} + ٣ ع^{٢} - ٤ = صفر

(ع^{٢} + ٤) (ع^{٢} - ١) = صفر

وحيث أن ت^{٢} = - ١

فإن (ع^{٢} - ٤ ت^{٢}) (ع^{٢} - ١) = صفر

(ع + ٢ ت) (ع - ٢ ت) (ع + ١) (ع - ١) = صفر

∴ ع = - ٢ ت ، ٢ ت ، - ١ ، ١

مجموعة الحل = {- ٢ ت ، ٢ ت ، - ١ ، ١} حلان مركبان حقيقيان وحلان مركبان غير حقيقيين.

مثال (٣):

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية في حقل الأعداد المركبة (ح ، + ، ×)

(i) $ع^{٢}$ + ٨١ = صفر

الحل: $ع^{٢}$ + ٨١ = $ع^{٢}$ − ٨١ × $ت^{٢}$ = صفر (كون $ت^{٢}$ = − ١)

∴ $ع^{٢}$ − ٨١ $ت^{٢}$ = صفر

وبالتحليل كفرق بين مربعين

(ع + ٩ ت) (ع − ٩ ت) = صفر

∴ ع = − ٩ ت ، ٩ ت

مجموعة الحل = {− ٩ ت ، ٩ ت} والجذران مركبان وغير حقيقيين.

(ii) $ع^{٢}$ + ع + ١ = صفر

الحل بواسطة القانون العام لحل المعادلات التربيعية:

حيث أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ١

$ب^{٢}$ − ٤ أ جـ = $(١)^{٢}$ − ٤ × ١ × ١ = − ٣

∴ ع = $\frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ = $\frac{- ١ \pm \sqrt{- ٣}}{٢}$ = $\frac{- ١ \pm \sqrt{٣} ت}{٢}$

∴ ع = {− $\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، − $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت} والجذران مركبان وغير حقيقيين

مثال (٤):

حوّل العدد المركب ١ + $\sqrt{٣}$ ت الى الصورة القطبية

الحل:

الصورة القطبية للعدد المركب س + جا ت = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

حيث $ر = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ ، $س = ر$ جتا هـ ، $ص = ر$ جا هـ

ومنه $ر = \sqrt{(١)^{٢} + (\sqrt{٣})^{٢}} = \sqrt{١ + ٣} = \sqrt{٤} = ٢$

ر جتا هـ = س $\longleftarrow$ جتا هـ = $\frac{س}{ر} = \frac{١}{٢}$

ر جا هـ = ص $\longleftarrow$ جا هـ = $\frac{ص}{ر} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ∢ هـ تقع في الربع الأول كون جا هـ ، جتا هـ موجبان

لكن ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٣}$

∴ ∢ هـ = $\frac{\pi}{٣}$

∴ $(١ + \sqrt{٣}\,ت) = ٢$ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) الصورة القطبية.

مثال (٥):

اذا كان $ع_{١} = ٦\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

$ع_{٢} = ٢$ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)

أوجد $ع_{١}ع_{٢}$ "وبالصورة القطبية ثم بالصورة الديكارتية"

الحل:

$ع_{١}ع_{٢}$ = [$٦\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)] [٢ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$)]

= ($٦\sqrt{٢}$) (٢) [جتا ($\frac{١٣\pi}{١٢}$ + $\frac{١٣\pi}{١٢}$) + ت جا ($\frac{٣\pi}{٤}$ + $\frac{\pi}{٣}$)]

= $١٢\sqrt{٢}$ [جتا $\frac{١٣\pi}{١٢}$ + ت جا $\frac{١٣\pi}{١٢}$] هذه الصورة القطبية

أما الصورة الديكارتية:

$ع_1 ع_2$ = ١٢ $\sqrt{٢}$ (جتا ١٩٥° + ت جا ١٩٥°) للسهورة حولنا تقدير الزاوية الى النظام السيني

= ١٢ $\sqrt{٢}$ (جتا (١٨٠° + ١٥°) + ت جا ١٨٠° + ١٥°)) كونها ١٩٥ تقع في الربع التالي

= ١٢ $\sqrt{٢}$ [- جتا ١٥° + ت (- جا ١٥°)]

= ١٢ $\sqrt{٢}$ [- جتا ١٥ – ت جا ١٥]

= ١٢ $\sqrt{٢}$ (- ٠,٩٦ – ت × ٠,٢٨)

= - (١٢ $\sqrt{٢}$) $\frac{(٩٦)}{١٠٠}$ - (١٢ $\sqrt{٢}$) $\frac{(٢٨)}{١٠٠}$ ت

= - $\frac{٢٨٨}{٢٥}$ $\sqrt{٢}$ - $\frac{١١٢ \sqrt{٢}}{٢٥}$ ت

مثال (٦):

أوجد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد - ١ أي أن المطلوب ايجاد $\sqrt[٣]{-١}$ جميعها

الحل:

نفرض أن (ع = $\sqrt[٣]{-١}$)^٣

ع^٣ = - ١

∴ ع^٣ + ١ = صفر

والتحليل كمجموع مكعبين

(ع + ١) (ع^٢ – ع + ١) = صفر

$\therefore$ ع = $-$ ١ الجذر الأول المركب الحقيقي

وكذلك $ع^{٢} - ع + ١ =$ صفر بالقانون العام حيث:

أ = ١ ، ب = $-$ ١ ، جـ = ١

$$\text{بما أن } ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$\text{فإن } ع = \frac{١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢} = \frac{١ \pm \sqrt{-٣}}{٢}$$

$$= \frac{١ \pm \sqrt{٣} ت}{٢} = \frac{١ - \sqrt{٣} ت}{٢} ، \frac{١ + \sqrt{٣} ت}{٢}$$

$\therefore \sqrt[٣]{-١} = \{-١ ، \frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت ، \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت\}$ جذر مركب حقيقي

وجذران مركبان غير حقيقيين

هذا ويمكن ايجاد $\sqrt[٣]{-١}$ اعتماداً على الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ كما يلي:

بما أن $\sqrt[٣]{-١} = \sqrt[٣]{-١ \times ١} = \sqrt[٣]{-١} \times \sqrt[٣]{١}$

$= -١ \{١ ، \omega ، \omega^{٢}\}$

$= \{-١ ، -\omega ، -\omega^{٢}\}$ حيث $\sqrt[٣]{-١} = -١$ كعدد مركب حقيقي

مثال (٧):

عيّن الأعداد المركبة التالية: $ع_{١} = -٢ + ت$

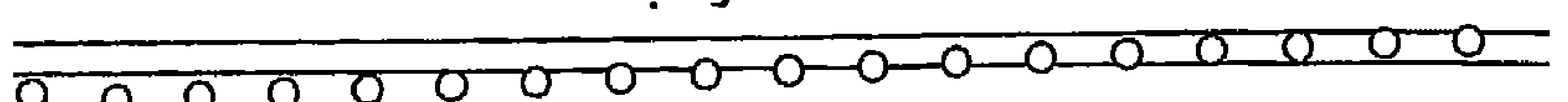
$ع_{٢} = -١ + ت$

$ع_{٣} = ٠ + ١ ت$

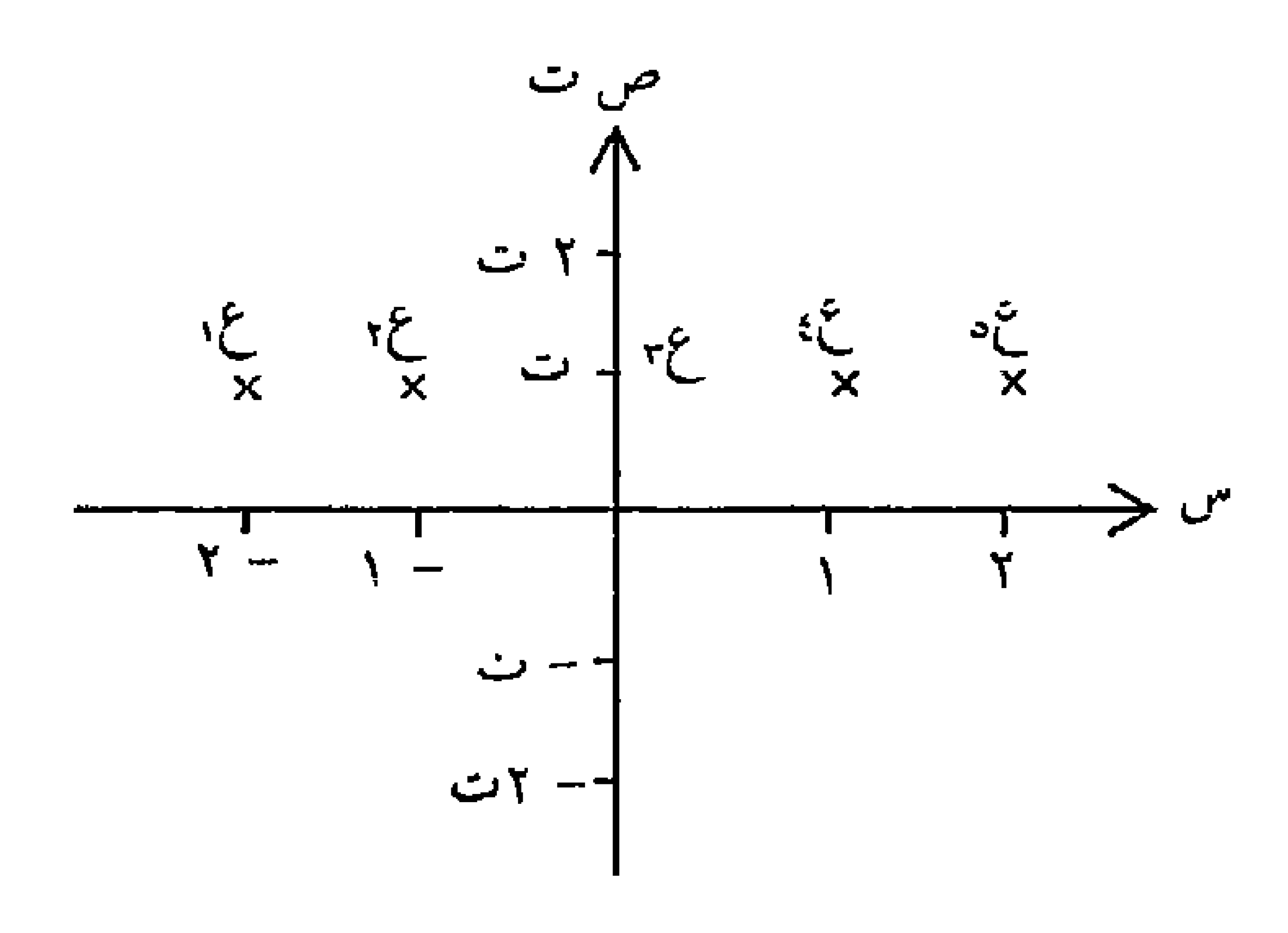
$ع_{٤} = ١ + ت$

$ع_{٥} = ٢ + ت$

وعلى سطح واحد (على مستوى ارجاندا وجاوس)



الحل:



مثال (٨):

احسب المقياس لكل من الأعداد المركبة التالية:

(i) $ع_1 = ٢ - ت$

بما أن المقياس للعدد المركب أ + ب ت هو $|أ + ب ت|$

$$= \sqrt{أ^2 + ب^2}$$

∴ مقياس العدد المركب ٢ - ١ ت = $|٢ - ١ ت| = \sqrt{(٢)^2 + (-١)^2} = \sqrt{٥}$

(ii) $ع_2 = \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت$

المقياس هو $\left| \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت \right|$

$$= \sqrt{\left(\frac{١}{٢}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^2} = \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤}{٤}} = \sqrt{١} = ١$$

مثال (٩):

اكتب $(-١ - ت)^5$ كعدد مركب على الصورة أ + ب ت

الحل:

بما أن ضرب القوس $(-1-ت)$ ٥ مرات عملية شاقة ومعقدة وتستغرق وقتاً طويلاً، لذا فإننا نحول العدد $(-1-ت)$ الى الصورة القطبية وبمساعدة قانون دي موافر ثم نعيده الى الصورة أ + ب ت هكذا:

بما أن أ + ب ت = ر (جتا هـ + ت جا هـ) بصورة قطبية.

وبما أن $ر = \sqrt{أ^2 + ب^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

وبما أن س = ر جتا هـ $\longleftarrow$ $جتا هـ = \frac{س}{ر} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

وكذلك ص = ر جا هـ $\longleftarrow$ $جا هـ = \frac{ص}{ر} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

∴ ∢ هـ تقع في الربع الثالث كون جا هـ ، جتا هـ سالبين

ولكن $ظا هـ = \frac{جا هـ}{جتا هـ} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}}} = 1$

$∴ ∢ هـ = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$∴ -1 - ت = \sqrt{2}\,(جتا \frac{5\pi}{4} + ت\, جا \frac{5\pi}{4})$

$∴ (-1-ت)^5 = [\sqrt{2}\,(جتا \frac{5\pi}{4} + ت\, جا \frac{5\pi}{4})]^5$

$= (\sqrt{2})^5\, [جتا \frac{5 \times 5\pi}{4} + ت\, جا \frac{5 \times 5\pi}{4}]$

$= 4\sqrt{2}\, [جتا \frac{25\pi}{4} + ت\, جا \frac{25\pi}{4}]$

$= 4\sqrt{2}\, [جتا \frac{\pi}{4} + ت\, جا \frac{\pi}{4}]$ بعد طرح ٣ دوران قيمة 2π

$= 4\sqrt{2}\, [\frac{1}{\sqrt{2}} + ت \times \frac{1}{\sqrt{2}}]$

$$= \frac{٤\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} + \frac{\text{ت} \times ٤\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$$

$$\therefore\ (-١ - ١\,\text{ت})^{٥} = ٤ + ٤\,\text{ت}$$

مثال (١٠):

اكتب ما يأتي على صورة عدد مركب أ + ب ت

(i) $\text{ت}^{-٢ن+١}$ حيث $\text{ن} \in \text{ص}$

الحل:

$$\text{ت}^{-٢ن+١} = \text{ت}^{-٢ن} \times \text{ت}^{١} = \frac{١}{\text{ت}^{٢ن}} \times \text{ت}$$

$$= \frac{\text{ت}}{(\text{ت}^{٢})^{ن}} = \frac{\text{ت}}{(-١)^{ن}} = \frac{\text{ت}}{\pm ١} = \pm\,\text{ت}$$

وكعدد مركب = ٠ ± ت أو (٠ − ت) ، (٠ + ت)

(ii) $\text{ت} + \text{ت}^{١١} = \text{ت} + \text{ت}^{٤(-٣)+١} = \text{ت} + (\text{ت}^{٢})^{-٣} \times \text{ت}$

$$= \text{ت} + (١)^{-٣} \times \text{ت} = \text{ت} + ١\,\text{ت} = ٢\,\text{ت}$$

وكعدد مركب = ٠ + ٢ ت

(iii) $\sqrt{-٩} + \sqrt{٩} = \sqrt{٩ \times -١} + ٣ = \sqrt{٩}\sqrt{-١} + ٣$

$$= ٣\,\text{ت} + ٣$$

وكعدد مركب = ٣ + ٣ ت

مثال (١١):

أوجد قيم س ، ص الحقيقيين فيما يلي:

$$\text{س} + \text{ص}\,\text{ت} = (١ + \text{ت}) + (٤ + ٢\,\text{ت})$$

الحل:

$$\text{س} + \text{ص}\,\text{ت} = ١ + \text{ت} + ٤ + ٢\,\text{ت}$$

$$= ١ + ٤ + \text{ت} + ٢\,\text{ت}$$

$$= ٥ + ٣\,\text{ت}$$

$$\therefore\ \text{س} + \text{ص}\,\text{ت} = ٥ + ٣\,\text{ت}$$

ومن علاقة المساواة وتساوي المعاملات الحقيقية المتناظرة ينتج أن:

$$\text{س} = ٥ \quad ، \quad \text{ص} = ٣$$

مثال (١٢):

اذا كان $\text{ع}_{١} = \dfrac{٧ - \text{ت}}{٢ - \text{ت}}$ ، $\text{ع}_{٢} = \dfrac{١٣ - \text{ت}}{٤ + \text{ت}}$

بيّن أن $\text{ع}_{١}\,\text{ع}_{٢}$ مترافقان

الحل:

نجد $\text{ع}_{١}$ ، $\text{ع}_{٢}$ بصورة أ + ب ت هكذا:

$$\text{ع}_{١} = \frac{٧ - \text{ت}}{٢ - \text{ت}} \times \frac{٢ + \text{ت}}{٢ + \text{ت}} = \frac{(٧ - \text{ت})\,(٢ + \text{ت})}{٤ - \text{ت}^{٢}} = \frac{١٤ + ٧\,\text{ت} - ٢\,\text{ت} - \text{ت}^{٢}}{٤ - (-١)}$$

$$= \frac{١٤ + ٥\,\text{ت} - (-١)^{٢}}{٤ + ١} = \frac{١٤ + ٥\,\text{ت} + ١}{٥} = \frac{١٥ + ٥\,\text{ت}}{٥}$$

$$= \frac{١٥}{٥} + \frac{٥\,\text{ت}}{٥} = ٣ + \text{ت}$$

$$\therefore\ \text{ع}_{١} = ٣ + \text{ت}$$

$$\text{ع}_{٢} = \frac{١٣ - \text{ت}}{٤ + \text{ت}} \times \frac{٤ - \text{ت}}{٤ - \text{ت}} = \frac{(١٣ - \text{ت})\,(٤ + \text{ت})}{١٦ - \text{ت}^{٢}}$$

$$= \frac{٥٢ - ١٣\,\text{ت} - ٤\,\text{ت} + \text{ت}^{٢}}{١٦ + ١} = \frac{٥٢ - ١٧\,\text{ت} - ١}{١٧}$$

$= \frac{51 - 17\text{ت}}{17} = \frac{51}{17} - \frac{17\text{ت}}{17}$

∴ $ع_2 = 3 - ت$

ولأن ٣ – ت هو مرافق ٣ + ت والعكس صواب

∴ $ع_1$ ، $ع_2$ مترافقان.

مثال (١٣):

أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب ع = ٥ + ١٢ ت

نفرض أن س + ص ت = $\sqrt{5 + 12\text{ت}}$ (لا تنسى أن س ، ص حقيقتان)

وبتربيع الطرفين:

$(س + ص ت = \sqrt{5 + 12\text{ت}})^2$

∴ $(س + ص ت)^2 = 5 + 12$ ت

∴ $س^2 + 2$ س ص ت + $ص^2 ت^2 = 5 + 12$ ت

∴ $س^2 + 2$ س ص ت – $ص^2 = 5 + 12$ ت

∴ $س^2 - ص^2 = 5$ (١)

٢ س ص = ١٢ (٢) ⟵ س ص = ٦

وبحل المعادلتين $س^2 - ص^2 = 5$ ⟵ (١)

س ص = ٥ ⟵ (٢) بالتعويض وهكذا..

$س = \frac{6}{ص}$ (س موضوع القانون)

∴ $(\frac{6}{ص})^2 - ص^2 = 5$

$ص^2$ ($\frac{6}{ص}$ - $ص^2 = 5$)

$٣٦ - ص^٤ = ٥ ص^٢$

$ص^٤ + ٥ ص^٢ - ٣٦ = صفر$

$(ص^٢ + ٩)(ص^٢ - ٤) = صفر$

وبما أن س ، ص أعداد حقيقة فإنا نكتفي بـ $(ص^٢ - ٤) = صفر$

$(ص + ٢)(ص - ٢) = صفر$

$ص = -٢ ، ٢$

ومنها $س = \frac{٦}{-٢} ، \frac{٦}{٢} \longleftarrow -٣ ، ٣$

$\therefore$ س + ص ت = $-٣ - ٢$ ت الجذر التربيعي الأول وهو مركب وغير حقيقي

وكذلك س + ص ت = ٣ + ٢ ت الجذر التربيعي الأول وهو مركب وغير حقيقي

$\therefore \sqrt{٥ + ١٢ ت} = \{-٣ - ٢ ت ، ٣ + ٢ ت\}$

مثال (١٤):

حلل ما يلي الى عوامل من الدرجة الأولى كأعداد مركبة وعلى الصورة س + ص ت:

(i) $ع^٤ + ٦ ع^٢ + ٥$

الحل:

$(ع^٢ + ٥)(ع^٢ + ١)$

$= (ع^٢ - ٥ ت^٢)(ع^٢ - ١ ت^٢)$

$= (ع - \sqrt{٥} ت)(ع + \sqrt{٥} ت)(ع - ت)(ع + ت)$

(ii) $ع^٥ + ع^٣ + ع^٢ + ١$

الحل:

$(ع^{٥} + ع^{٣}) + (ع^{٢} + ١)$

$= ع^{٣}(ع^{٢} + ١) + ١(ع^{٢} + ١)$

$= (ع^{٣} + ١)(ع^{٢} + ١)$

$= (ع + ١)(ع^{٢} - ع + ١)(ع - ١ت)(ع + ١ت)$

$= (ع - ت)(ع + ت)(ع + ١)(ع^{٢} - ع + ١)$

لكن $١ + \omega + \omega^{٢} = ١$ (الجذور التكعيبية للواحد الصحيح)

$\therefore ١ = -\omega - \omega^{٢}$

$\therefore (ع - ت)(ع + ت)(ع + ١)(ع^{٢} - ع - \omega - \omega^{٢})$

$= (ع - ت)(ع + ت)(ع + ١)\{(ع^{٢} - ع) - (ع + \omega)\}$

$= (ع - ت)(ع + ت)(ع + ١)\{(ع - \omega)(ع + \omega) - ١(ع + \omega)\}$

$= (ع - ت)(ع + ت)(ع + ١)\{(ع + \omega) - (ع - \omega - ١)\}$

لكن $١ + \omega + \omega^{٢} =$ صفر

$\therefore \omega^{٢} = -١ - \omega$

$\therefore = (ع - ت)(ع + ت)(ع + ١)(ع + \omega)(ع + \omega^{٢})$

$\therefore ع^{٥} + ع^{٣} + ع^{٢} + ١ = (ع - ت)(ع + ت)(ع + ١)(ع + \omega)(ع + \omega^{٢})$

مثال (١٥):

اذا كان $(س + ت ص)(٣ - ٢ت) = ١٣$

ما العلاقة بين ص ، س ؟

الحل:

(س + ت ص) (٣ − ٢ ت) بعد التخلص من ت هكذا:

= س (٣ − ٢ ت) + ت ص (٣ − ٢ ت) = ١٣

= ٣ س − ٢ س ت + ٣ ص ت − ٢ ت^{٢} ص = ١٣

= ٣ س − ٢ س ت + ٣ ص ت − ٢ ص (− ١) = ١٣

= ٣ س − ٢ ت س + ٣ ص ت + ٢ ص = ١٣

= (٣ س + ٢ ص) + (− ٢ ت + ٣ ص ت) = ١٣

(٣ س + ٢ ص) + (− ٢ + ٣ ص) ت = ١٣ + ٠ ت

∴ ٣ س + ٢ ص = ١٣ ⟵ (١) وباستبعادها لأنها لا تعطي علاقة بين س ، ص

− ٢ س + ٣ ص = ٠ ⟵ (٢)

ومن المعادلة (٢) ٢ س = ٣ ص

∴ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$ أو $\frac{ص}{س} = \frac{٣}{٢}$ وكلاهما نفس العلاقة

مثال:

كوّن المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها ٥ + ت

الحل:

اذا كان أحد الجذرين ٥ + ت

فالجذر الآخر هو المرافق وهو ٥ − ت

وبما أن تركيب المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية يتم هكذا:

ع^{٢} − (مجموع الجذرين) ع + حاصل ضربهما = صفر

∴ $ع^٢ - (٥ + \cancel{ت} + ٥ - \cancel{ت}) ع + (٥ + ت) (٥ - ت) = صفر$

$ع^٢ - ١٠ ع + ٢٥ - ت^٢ = صفر$

$ع^٢ - ١٠ ع + ٢٥ + ١ = صفر$

$ع^٢ - ١٠ ع + ٢٦ = صفر$

مثال (١٧):

احسب الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد ٢٧

الحل:

$\sqrt[٣]{٢٧}$ كأعداد مركبة.

$= \sqrt[٣]{٢٧} (١ ، \omega ، \omega^٢)$ حيث $\sqrt[٣]{٢٧}$ كعدد مركب حقيقي

$= ٣ (١ ، \omega ، \omega^٢)$

$= ٣ ، ٣\omega ، ٣\omega^٢$

مثال (١٨):

احسب مجموع المتسلسلة $١ + \omega + \omega^٢ + \cdots + \omega^{٦٤}$

الحل:

هذه متسلسلة هندسية حيث $\frac{\omega}{١} = \frac{\omega^٢}{\omega} = \omega$

عدد حدودها ن = ٦٥ حداً.

وبما أن $جـ_ن = \frac{أ (ر^ن - ١)}{ر - ١}$ ، $ر \neq ١$

∴ $جـ_{٦٥} = \frac{١ (\omega^{٦٥} - ١)}{\omega - ١}$

لكن $\omega^{٦٥} = \omega^{٣(٢١)+٢} = (\omega)^{٣} \times \omega^{٢}$

$= (١)^{٢١} \times \omega^{٢}$

$= ١ \times \omega^{٢}$

$= \omega^{٢}$

	٢١
٣	٦٥
	٦
	٠٥
	٣
	٢

$\therefore$ جـ$_{٦٥}$ $= \frac{١(\omega^{٢} - ١)}{\omega - ١} = \frac{(\omega - ١)(\omega - ١)}{\omega - ١} = \omega + ١$

مثال (١٩):

أوجد مجموع الحل للمعادلة $ع^{٤} - ٢ع^{٣} + ٢ع^{٢} - ٢ع + ١ =$ صفر

الحل:

بواسطة نظرية العوامل والبيان:

بما أن عوامل الحد الأخير = ١ ، − ١

نجد: $ق(١) = (١)^{٤} - ٢(١)^{٣} + ٢(١)^{٢} - ٢(١) + ١$

$= ٤ - ٤ =$ صفر

$\therefore$ ١ جذراً للمعادلة منها ٤ − ١ كامل

وبالقسمة:

التركيبية الثابت

	$ع^{٤}$	$ع^{٣}$	$ع^{٢}$	$ع$	$ع^{٠}$
(١)	١	−٢	٢	−٢	١
	ل	١	−١	١	−١
	١	−١	١	−١	٠

$\therefore ع^{٤} - ٢ع^{٣} + ٢ع^{٢} - ٢ع + ١ = (ع\ ١)(ع^{٣} - ع^{٢} + ع - ١) =$ صفر

$\therefore ع^{٣} - ع^{٢} + ع - ١ =$ صفر

(ع^{3} – ع^{2}) + (ع - ١) = صفر

ع^{2}(ع - ١) + ١ (ع - ١) = صفر

(ع - ١) (ع^{2} + ١) = صفر

∴ ع - ١ عامل مكرر ∴ ١ جذر مكرر

ع^{2} + ١ = صفر

ع^{2} – ت^{2} = صفر كون ١ = ت^{2}

∴ (ع + ت) (ع – ت) = صفر

ع = - ت ، ت

∴ مجموعة الحل= {- ت ، ت ، ١ ، ١} وكون ١ ، جذر مكرر

فإن مجموعة الحل = {- ت ، ت ، ١}

مثال (٢٠):

(i) اكتب المعادلة التالية ٢ س^{2} + ٣ ص^{2} = ٦ بالصورة القطبية

تحذف س ، ص ونستبدلهما بـ جتا هـ ، جا هـ ، ر .

الحل:

بما أن س = ر جتا هـ ، ص = ر جا هـ

٢ س^{2} + ٣ ص^{2} = ٢ (ر جتا هـ)^{2} + ٣ (ر جا هـ)^{2} = ٦

= ٢ (ر^{2} جتا^{2} هـ + ٣ ر^{2} جا^{2} هـ) = ٦

∴ ر^{2} جتا^{2} هـ + ٣ س^{2} جا^{2} هـ = ٣ المعادلة القطبية.

(ii) اكتب المعادلة التالية هـ = $\frac{\pi}{٢}$ بالصورة الديكارتية

بما أن س = ر جتا هـ

ص = ر جا هـ

بالقسمة ظا هـ = $\frac{ص}{س}$

لكن ظا هـ = ظا $\frac{\pi}{٢}$ = $\frac{١}{٠}$ كون غير معرف

$\therefore$ $\frac{١}{٠}$ = $\frac{ص}{س}$ وبالضرب التبادلي

س= صفر المعادلة الديكارتية.

(٢٤- ١٠) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) احسب الجذر التربيعي للعدد المركب ع = - ٧ - ٢٤ ت

{ ± ٣ ∓ ٤ ت }

(٢) اكتب حاصل الضرب [جتا ٨٠° + ت جا ٨٠°] [٦ جتا ١٣٠° + ت جا ١٣٠°]

بصورة أ + ب ت {- ٩ $\sqrt{٣}$ - ٩ ت}

وكذلك اكتب خارج القسمة $\frac{١٢ \text{ (جتا ٥٤° + ت جا ٥٤°)}}{٣ \text{ (جتا ٢٤° + ت جا ٢٤°)}}$ بصورة أ + ب ت

{ ٢ $\sqrt{٣}$ + ٢ ت}

(٣) بيّن أن (١ + ت)^٢ = - ٢ + ٢ ت

وكذلك (١ — ت)^٤ = - ٤ + ٠ ت

ثم كذلك $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} ت\right)^{١٠٠}$ = - $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

{ارشاد: حول الى الصورة القطبية اذا أردت}

(٤) أوجد مجموعة الحل للمعادلة في حقل الأعداد المركبة

ع^٣ - ١٥ ع - ١٢٦ = صفر {٦ ، - ٣ ± ٢ $\sqrt{٣}$ ت}

(٥) حل نظام المعادلات التالي:

س + ص = ٤ (١)

(س^٢ + ص^٢) (س^٣ + ص^٣) = ٢٨٠ (٢)

{ (٢ ± $\sqrt{\frac{١٩}{٣}}$ ت ، ٢ ∓ $\sqrt{\frac{١٩}{٣}}$ ت)}

(٦) اكتب حاصل الضرب (٤ + $\sqrt{٣}$ ت) (٤ − $\sqrt{٣}$ ت) كعدد مركب

بصورة أ + ب ت {١٩ + ٠ ت}

(٧) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية في حقل الأعداد المركبة:

(١) ع^{٢} + ١٦ = صفر {− ٤ ت ، ٤ ت}

(٢) ع^{٢} + ٢ ع + ٣ = صفر {− ١ − $\sqrt{٢}$ ت ، − ١ + $\sqrt{٢}$ ت}

(٨) أجر العمليات التالية في حقل الأعداد المركبة:

(١) (− ١ + ٢ ت) + (٤ + ٧ ت) {٣ + ٩ ت}

(٢) (٦ − ٣ ت) − (٧ − ١٣ ت) {− ١ + ١٠ ت}

(٣) (٤ + ٥ ت) (٧ + ٢ ت) {١٨ + ٤٣ ت}

{ارشاد: استعن بقانون التوزيع}

(٤) (− ٣ + ٥ ت) ÷ (٣ + ٤ ت) {$\frac{١١}{٢٥}$ + $\frac{٢٧}{٢٥}$ ت}

{ارشاد: انطق المقام}

(٩) حوّل العدد المركب ع = − ٦ + ٦ ت الى الصورة القطبية.

{٦$\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)}

(١٠) اكتب المعادلة ر = ٤ جا هـ بالصورة الديكارتية.

{س^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤}

{ارشاد: استعن باكمال المربع}

(١١) اكتب معادلة الخط المستقيم أ س + ب ص + جـ = صفر بالصورة القطبية

{ر (أ جتا هـ + ب جا هـ) + ج = صفر}

(١٢) بيّن أن المعادلة القطبية ر = ٨ جا هـ + ٤ جتا هـ هي معادلة دائرة، ثم أوجد مركزها ونصف قطرها.

{م (٢ ، ٤) ، نق = ٢ $\sqrt{٥}$}

{ ارشاد: حولها الى الصورة الديكارتية }

(١٣) حل المعادلة س = ١ + $\omega^{س}$ + $\omega^{٢س}$ { ٢ }

{حيث ω من الجذور التكعيبية للواحد الصحيح}

(١٤) بيّن (١ - ω)^{٦} = - ٢٧

{ ارشاد: ابدأ من (ω - ω)^{٢} = ± $\sqrt{٣}$ ت}

(١٥) أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٤ ع^{٢} – ٨ ع + ٥ = صفر في حقل الأعداد المركبة.

{ ١ ± $\frac{١}{٢}$ ت }

(١٦) اكتب حاصل الضرب (٤ - $\sqrt{-٣}$) (٤ + $\sqrt{-٣}$) بصورة أ + ب ت

{ ١٩ + ٠ ت }

(١٧) أوجد مجموعة الحل للمعادلة ع + $\frac{١}{ع}$ = ١ ، ع ≠ صفر في حقل الأعداد المركبة.

{$\frac{١}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت ، $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت}

(١٨) أوجد مجموعة الحل للمعادلة ٣ ع^{٣} + ٩ ع^{٢} + ٨ ع + ٢٤ = صفر في حقل الأعداد المركبة.

{ - ٣ ، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ت ، - $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ت }

(١٩) حلل الاقتران ق (س) = س^٣ + ٥ س^٢ + س + ٥ في حقل الأعداد المركبة.

{ (س + ٥) (س − ت) (س + ت)}

(٢٠) ما قيم س ، ص الحقيقية التي تحقق المعادلة:

$\frac{س + ص}{ت}$ + س − ص + ٤ = صفر { (− ٢ ، ٢) }

{ ارشاد: اقسم الطرف الأيمن الى قسمين وبصورة أ + ب ت لكلٍ}

(٢١) اكتب العدد $\frac{-١}{١ + ت}$ بالصورة القطبية.

{ $\frac{١}{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ ت جا $\frac{\pi}{٣}$ }

{ارشاد: ضعه أولاً بالصورة س + ص ت }

(٢٢) ضع الأعداد التالية بصورة س + ص ت

(١) $\frac{٣ ت}{١ - ت}$ ، (٢) $\frac{٣ - ٢ ت}{٥ + ٢ ت}$

{ - $\frac{٣}{٢}$ + $\frac{٣}{٢}$ ت ، $\frac{١١}{٢٩}$ - $\frac{١٦}{٢٩}$ ت }

(٢٣) ما قيمة (١ + ω + $\omega^٢$) (١ + ω^2 + $\omega^٥$) { ٣ }

(٢٤) اكتب المعادلة القطبية للدائرة س^٢ + (ص − ١)^٢ = ٩

والمستقيم س = ٣

{ جا هـ = $\frac{٧}{\bar{ر}}$ ، جتا هـ = $\frac{٣}{ر}$ }

ثم اكتب معادل الشكل الهندسي الذي معادلته القطبية:

ر^٢ (جتا ٢ هـ) = ١ {س^٢ − ص^٢ = ١ }

(٢٥) حل المعادلات التالية في حقل الأعداد المركبة:

(١) ع^{٢} − ٦ ع + ٢٠ = صفر { ٣ ± $\sqrt{١١}$ ت}

(٢) ع^{٣} + ٦٤ = صفر {− ٤ ، ٢ ± ٢$\sqrt{٣}$ ت}

(٣) ع^{٤} + ٨ ع^{٢} − ٩ = صفر {± ١ ، ± ٣ ت}

(٤) ع^{٣} − ٩ ع^{٢} + ٢٥ ع + ١٧ = صفر {− ١ ، − ٤ ± ت}

{ارشاد: استعن بنظرية العوامل}

(٢٦) احسب الجذور التكعيبية للعدد − ٢١٦

{− ٦ ، − ٦ ω ، − ٦ $\omega^{٢}$}

(٢٧) احسب الجذور التربيعية للعدد − ٥ − ١٢ ت

{٢ − ٣ ت ، − ٢ + ٣ ت}

(٢٨) ما قيمة ت^{٥١} وبصورة س + ص ت { ٠ − ت }

(٢٩) جد الاحداثيات القطبية للنقطة (− ٣ ، ٣)

{ (٣$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}\pi$) }

(٣٠) اكتب العدد المركب الذي مقاسه π وسعته $\frac{\pi}{٤}$ وبصورة س + ص ت

{$\frac{\sqrt{٢}}{٢}\pi$ + $\frac{\sqrt{٢}}{٢}\pi$ ت}

(٣١) ما قيمة س ، ص الحقيقية عندما:

٥ (س + ٢ ت) − ٢ (١ + ص ت) = ١١ + ٤ ت

(٣٢) ما معادلة الشكل الهندسي الذي تمثله المعادلة |ع| = ٤ حيث ع = س + ص ت

{ س^{٢} + ص^{٢} = ١٦ }

(٣٣) بيّن أن ت هو أحد جذور المعادلة:

ع^٤ - ٢ ع^٣ + ٢ ع^٢ - ٢ ع + ١ = صفر {- ت}

ثم ابحث عن جذر آخر.

(٣٤) حل المعادلة ع^٢ - ٢ ت ع + ٣ = صفر في حقل الأعداد المركبة.

(٣٥) ركّب المعادلة التربيعية التي جذراها - ٢ + ٥ ت ، - ٢ - ٥ ت

(٣٦) أوجد الجذور التربيعية لكل عدد من الأعداد التالية:

٤ ، - ٤ ، ٤ ت ، - ٤ ت

(٣٧) اذا كان ع~١~ = ١ + ٢ ت ، ع~٢~ = - ٢ - ٣ ت

أوجد وبصورة س + ص ت: ع~١~ + ع~٢~ ، ع~١~ − ع~٢~ ، ع~١~ · ع~٢~ ، ع~١~ / ع~٢~

(٣٨) أوجد مقلوب كل من الأعداد واكتبه على شكل س + ص ت

ت ، - ت ، (١ − ت) / (١ + ت)

(٣٩) أجرِ العمليات الرياضية التالية واكتب الجواب على صورة س + ص ت كعدد مركب.

(١) (٢ + ٣ ت)^٢ (٣ - ٤ ت)^٢

(٢) (٣ + ٢ ت) / (٢ - ٥ ت) + (٣ - ٢ ت) / (٢ + ٥ ت)

(٤٠) بيّن أن (١ + √٣ ت)^٧ = - ٣ - √٣ ت

{ارشاد: حوله الى الصورة القطبية ثم أعده الى الصورة الديكارتية س + ص ت}

(٤١) أوجد مجموعة الحل للمعادلة ع^{٣} - ١٥ ع - ١٢٦ = صفر في حقل الأعداد المركبة.

{٦ ، - ٣ + ٢$\sqrt{٣}$ ت ، - ٣ - ٢$\sqrt{٣}$ ت}

(٤٢) اكتب المعادلة القطبية ر^{٢} (١- ٢ جا^{٢} هـ) = ١ بدلالة الاحداثيات الديكارتية.

{س^{٢} – ص^{٢} = ١}

(٤٣) حل المعادلة ع^{٣} + ٤ ع^{٢} - ٢ ع - ٢٠ = صفر في حقل الأعداد المركبة.

{١٢ - ٣ – ت ، - ٣ + ت}

(٤٤) اذا كان ٢ ت أحد جذور المعادلة:

ك ع^{٣} + ٥ ع^{٢} + ٨ ع + ١٠ = صفر ما قيمة ك ؟ {٢}

(٤٥) اكتب العدد $\frac{\text{١٨ + ٢ ت}}{\text{٥ - ٤ ت}}$ بالصورة القطبية

{٢$\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$)}

(٤٦) ما العلاقة بين المتغيرين س ، ص اذا كان (س + ص ت) (٣ - ٢ ت) = ١٣

(٤٧) ما قيمة (١ - ٢ $\omega^{٢٨}$ + $\omega^{٢}$) (١ + ω - ٥ $\omega^{٢}$) {١٨}

(٤٨) كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها ω ، $\omega^{٢}$ {ع^{٢} + ع + ١ = صفر}

(٤٩) ما قيمة (١ + ω)^{١٢} {١}

(٥٠) بيّن أن قيمة (١ - $\omega^{٢}$ + $\omega^{٤}$) (١ + $\omega^{٢}$ - $\omega^{٤}$) = ٤

(٥١) حل المعادلة $|ع^{٢} - ٥ع + ٦| = ٦$ في حقل الأعداد المركبة.

$$\{ ٠ ،\ ٥ ،\ \frac{٥ - \sqrt{٢٣}\ ت}{٢} ،\ \frac{٥ + \sqrt{٢٣}\ ت}{٢} \}$$

(٥٢) حل المعادلات التالية في حقل الأعداد المركبة:

(١) $ع^{٤} - ٣ع^{٢} + ٢ = $ صفر (٢) $ع^{٤} + ٣ع^{٢} + ٣ = $ صفر

{ارشاد : ابدأ بالحل وكأنها تربيعية}

(٥٣) حل المعادلة في حقل الأعداد المركبة

$$(س^{٢} - ٥س + ٢)^{٢} = س^{٢} - ٥س + ٢٢$$

{ ارشاد: افرض س٢ - ٥ س = ص ثم أكمل الحل }

(٥٤) فك الأقواس $(٣ + ٤ت)^{٢}$

$(٣ - ٤ت)^{٢}$

$(٣ + ٤ت)(٣ - ٤ت)$

{- ٧ + ٢٤ ت ، - ٧ - ٢٤ ت ، ٢٥ }

(٥٥) بيّن أن $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}ت\right)^{٣٠} = -ت$

{ارشاد : حوّل العدد الى الصورة القطبية ثم أعد كتابته بصورة أ + جـ ت}

المراجع

"المراجع العربية"

(١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.

(٢) ايرل و . سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.

(٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.

(٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية" مكتبة بغداد – عمان ، ١٩٩٤ م.

(٥) شارلزسولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.

(٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.

(٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.

(٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع – عمان ، ١٩٨٢ م.

(٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.

(١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.

(١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا – موسكو، ١٩٧٥ م.

(١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣م.

(١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.

(١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.

(١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.

(١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.

(١٩) وليم جويس ورفيقه "مبدائ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.

المراجع الأجنبية:

(1) Erwin Kreyszing "Advanced Engineering maths" 1993.

(2) H. S. Hall "Elemen tary Algebra For Schools" London, 19932.

(3) Richard Johnson Baygh, Discrete maths" 1993.

(4) R. D. Knight , New mathematics" Five Books, 1968.

(5) S. L . Salar, "Calculus, One and Several Variables" 1982.

(6) Robert Ellis and others, "Calculus With Analytic Geometry, 1990.

(7) Robert. T. Seeley, "Calculus of one Variable" 1972.



الرياضيات الشاملة

(التكامل - القطوع - الأعداد المتتالية)


دار أسامة
للنشر والتوزيع
الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658253 / 00962 6 5658252
فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781
البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo
الموقع الإلكتروني: www.darosama.net